MATEMATICAS DISCRETAS 1
PARCIAL 1 – LOGICA PROPOSICIONAL

Nombre: ______________________SOLUCION__________________________ **Identificación**: ______SOLUCION_______

1. **(10 %)** A continuación, se lista muestran varias oraciones declarativas:
   a. El jefe pretende que acepte sus condiciones, de lo contrario, me despedirá
   b. Su decisión de no quedarse en Wisconsin o ir a Harvard o a otra universidad importante en el ámbito de la investigación tuvo sus consecuencias.
   c. Acepto la propuesta de trabajo, solo si el salario es alto y el horario no es extenso
   d. Yo te ayudo si, y sólo si muestras verdadero compromiso
   e. Mientras trabajaba en las notas en su finca campestre de Surrey, en el verano de 1843, Ada y Babbage intercambiaron numerosas cartas.
   f. Para ganar el examen, se necesita que estudie, haga muchos ejercicios además de no trasnochar rumbeando.

   Elija solo 3 de las expresiones anteriores y para estas:

   - Identifique e indique cada una de las proposiciones simples de cada oración.
   - Una vez identificadas las proposiciones simples, escriba la expresión simbólica haciendo uso de estas.

   Solución:

   a. El jefe pretende que acepte sus condiciones, de lo contrario, me despedirá

Proposiciones simples
Enunciado: El jefe pretende que acepte sus condiciones, de lo contrario, me despedirá **Proposiciones simples**: • ***P***: Acepto los condiciones del jefe. • ***Q***: El jefe me despide.
Expresión
$\neg P \rightarrow Q$

   b. Su decisión de no quedarse en Wisconsin o ir a Harvard o a otra universidad importante en el ámbito de la investigación tuvo sus consecuencias.

Proposiciones simples
Enunciado: Su decisión de no quedarse en Wisconsin o ir a Harvard o a otra universidad importante en el ámbito de la investigación tuvo sus consecuencias. **Proposiciones simples**: • ***P***: Decidió quedarse en Wisconsin. • ***Q***: Decidió ir a Harvard. • ***R***: Decidió ir a otra uniersidad importante en el ambito investigativo. • ***Q***: La decisión tomada tuvo sus consecuencias
Expresión
$\neg P \vee Q \vee R \rightarrow S$

   c. Acepto la propuesta de trabajo, solo si el salario es alto y el horario no es extenso.

Proposiciones simples
Enunciado:

Acepto la propuesta de trabajo, solo si el salario es alto y el horario no es extenso. **Proposiciones simples**: • $\boldsymbol{P}$: Acepto su propuesta de trabajo • $\boldsymbol{Q}$: El salario es alto. • $\boldsymbol{R}$: El horario es extenso.
Expresión
$P \rightarrow Q \wedge \neg R$

d. Yo te ayudo si, y sólo si muestras verdadero compromiso.

Proposiciones simples
Enunciado: Yo te ayudo si, y sólo si muestras verdadero compromiso. **Proposiciones simples**: • $\boldsymbol{P}$: Te ayudo • $\boldsymbol{Q}$: Muestras verdadero compromiso
Expresión
$P \leftrightarrow Q$

e. Mientras trabajaba en las notas en su finca campestre de Surrey, en el verano de 1843, Ada y Babbage intercambiaron numerosas cartas.

Proposiciones simples
Enunciado: Mientras trabajaba en las notas en su finca campestre de Surrey, en el verano de 1843, Ada y Babbage intercambiaron numerosas cartas. **Proposiciones simples**: • $\boldsymbol{P}$: *Ada* trabajaba en las notas en su finca campestre de Surrey • $\boldsymbol{Q}$: *Ada* intercambio numerosas cartas con Babbage
Expresión
$P \wedge Q$

f. Para ganar el examen, se necesita que estudie, haga muchos ejercicios además de no trasnochar rumbeando.

Proposiciones simples
Enunciado: Para que gane el examen, se necesita que estudie, haga muchos ejercicios además de no trasnochar rumbeando. **Proposiciones simples**: • $\boldsymbol{P}$: Gana el examen • $\boldsymbol{Q}$: Estudia • $\boldsymbol{R}$: Hace muchos ejercicios • $\boldsymbol{S}$: No trasnocha rumbeando
Expresión
$P \rightarrow Q \wedge R \wedge \neg S$

2. **(10 %)** Sean $\boldsymbol{P}$: Es rico y $\boldsymbol{Q}$: Es feliz. Escriba cada proposición en forma simbólica, usando P y Q

a. Si es rico, entonces es infeliz.

b. No es rico ni feliz.
c. Es necesario ser pobre para ser feliz.
d. Ser pobre es ser infeliz.

Solución:

Teniendo como proposiciones simples:

- $\boldsymbol{P}$: Es rico
- $\boldsymbol{Q}$: Es feliz

En la siguiente tabla se muestra el enunciado y la expresión lógica equivalente:

Enunciado	**Expresión lógica**
Si es rico, entonces es infeliz.	$P \to \neg Q$
No es rico ni feliz.	$\neg P \land \neg Q$
Es necesario ser pobre para ser feliz.	$\neg Q \to P$
Ser pobre es ser infeliz.	$\neg P \leftrightarrow \neg Q$

3. **(10 %)** Sean P, Q y R expresiones lógicas, sí $R \land P \to Q \land P$ es formalmente cierta, ¿cuáles valores de verdad no pueden tomar P, Q y R? Use la tabla de verdad para llegar al resultado.

Usando tabla de verdad: Tenemos que:

- **Proposiciones**: P, Q y R
- **Numero de filas**: $n = 3 \to f = 2^3 = 8$

A continuación, se muestra la tabla de verdad:

P	Q	R	$R \land P$	$Q \land P$	$R \land P \to Q \land P$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

Según lo anterior, los valores que hacen que la expresión $R \land P \to Q \land P \equiv F$ (es decir los que no pueden tomar P, Q y R) son: $P \equiv V$, $Q \equiv F$ y $R \equiv V$.

4. **(10 %)** Para la proposición compuesta dada a continuación, realice la tabla de verdad y diga a qué tipo de proposición pertenece.

$$[P \lor (R \to \neg S)] \to [\neg(\neg P \land S) \land \neg R]$$

Solución:

P	R	S	$\neg P$	$\neg R$	$\neg S$	$R \to \neg S$	$\neg P \land S$	$\neg(\neg P \land S)$	$P \lor (R \to \neg S)$	$\neg(\neg P \land S) \land \neg R$	F
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0

5. **(20 %)** Demuestre mediante el uso de las identidades lógicas (usando la tabla de equivalencias lógicas), las siguientes equivalencias:
   a. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \wedge P) \vee (P \wedge R) \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$
   b. $P \wedge (S \vee \neg R) \equiv \neg(P \rightarrow \neg(S \vee \neg R))$

   Recomendación: Inicie con el lado con la expresión más compleja.

   Solución:

   a. $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \wedge P) \vee (P \wedge R) \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$

Procedimiento			Razón
$(P \wedge P) \vee (P \wedge R) \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$	$\equiv$	$(P) \vee (P \wedge R) \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$	Idempotencia **Y**
		$[(P) \vee (P \wedge R)] \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$	Asociatividad **O**
		$P \vee (P \wedge Q) \vee (Q \wedge R)$	Absorción **O**
		$[P \vee (P \wedge Q)] \vee (Q \wedge R)$	Asociatividad **O**
		$P \vee (Q \wedge R)$	Absorción **O**

   b. $P \wedge (S \vee \neg R) \equiv \neg(P \rightarrow \neg(S \vee \neg R))$

Procedimiento			Razón
$\neg(P \rightarrow \neg(S \vee \neg R))$	$\equiv$	$\neg\left(P \rightarrow \left(\neg S \wedge \neg(\neg R)\right)\right)$	Ley de Morgan **O**
		$\neg(P \rightarrow (\neg S \wedge R))$	Doble negación
		$\neg(\neg P \vee (\neg S \wedge R))$	Implicación
		$\neg(\neg P) \wedge \neg(\neg S \wedge R)$	Ley de Morgan **O**
		$P \wedge \neg(\neg S \wedge R)$	Doble negación
		$P \wedge (\neg(\neg S) \vee \neg R)$	Ley de Morgan **Y**
		$P \wedge (S \vee \neg R)$	Doble negación

6. **(10 %)** Dados los siguientes argumentos:
   a. Argumento 1:

      Si llueve, Eric se enfermará
      No llovió
      ____
      Eric no estaba enfermo.

   b. Argumento 2:

      Si llueve, Eric se enfermará.
      Eric no estaba enfermo.
      ____
      No llovió.

   Para cada argumento:

   - Identifique las proposiciones lógicas simples y a partir de estas escriba las premisas y la conclusión empleando los tres tipos de notación (Consecuentes, tautología y proposicional).
   - Mediante la tabla de verdad demuestre la validez para cada caso.

Solución:

a. Argumento 1:

Si llueve, Eric se enfermará
No llovió
___
Eric no estaba enfermo.

Argumento	**Representación**	
Si llueve, Eric se enfermará No llovió ___ Eric no estaba enfermo.	**Consecuentes**	$P \rightarrow Q$ $\neg P$ ___ $\therefore \neg Q$
Proposiciones simples	**Tautología**	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg P \rightarrow \neg Q$
• $\boldsymbol{P}$: Llueve • $\boldsymbol{Q}$: Eric se enferma	**Proposicional**	$(P \rightarrow Q), \neg P \vdash \neg Q$
Demostración de validez		

					Premisas		Conclusión
P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg P$	$\neg Q$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	0	0

Conclusión: El argumento es invalido.

b. Argumento 2:

Si llueve, Eric se enfermará.
Eric no estaba enfermo.
___
No llovió.

Argumento	Representación Argumento	
Si llueve, Eric se enfermará. Eric no estaba enfermo. ___ No llovió.	**Consecuentes**	$P \rightarrow Q$ $\neg Q$ ___ $\therefore \neg P$
Proposiciones simples	**Tautología**	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$
• $\boldsymbol{P}$: Llueve • $\boldsymbol{Q}$: Eric se enferma	**Proposicional**	$(P \rightarrow Q), \neg Q \vdash \neg P$
Demostración de validez		

					Premisas		Conclusión
P	Q	$\neg P$	$\neg Q$	$P \rightarrow Q$	$P \rightarrow Q$	$\neg Q$	$\neg P$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	0

Conclusión: El argumento es válido.

7. **(15 %)** Demostrar el siguiente argumento mediante el uso de las reglas de inferencia sustentando cada paso:

$$[(P \land R) \to Q] \land (\neg R \to P) \land \neg(P \land \neg R) \Longrightarrow (R \lor Q)$$

Solución:

$$\begin{array}{ll} (P \land R) \to Q & (\boldsymbol{a}) \\ \neg R \to P & (\boldsymbol{b}) \\ \neg(P \land \neg R) & (\boldsymbol{c}) \\ \hline \therefore R \lor Q & \end{array}$$

	Pasos	Justificación
1	$\neg(P \land \neg R)$	Premisa **(c)**
2	$\neg P \lor R$	Ley de Morgan en **paso 1**
3	$\neg R \to P$	Premisa **(b)**
4	$\neg(\neg R) \lor P$	Condicional en **paso 3**
5	$R \lor P$	Doble negación en **paso 4**
6	$P \lor R$	Conmutativa en **paso 5**
7	$R \lor R$	Resolución en **paso 6**
8	R	Idempotencia **paso 7**
9	$(P \land R) \to Q$	Premisa **(a)**
10	$\neg(P \land R) \lor Q$	Condicional en **paso 9**
11	$\neg P \lor \neg R \lor Q$	Ley de Morgan en **paso 10**
12	$\neg R \lor \neg P \lor Q$	Conmutativa en **paso 11**
13	$\neg P \lor Q$	Eliminación en **pasos 8 y 12**
14	$P \to Q$	Condicional en **paso 13**
15	$\neg R \to Q$	Transitividad en **pasos 3 y 14**
16	$\neg(\neg R) \lor Q$	Condicional en paso 15
17	$\therefore R \lor Q$	Doble negación paso 16

8. **(15 %)** Representar el siguiente enunciado como una argumentación y llevar a cabo la demostración mediante el uso de la tabla de inferencias sustentando cada paso:

> Si tengo mucho dinero y soy muy guapo, entonces las muchachas me quieren. Ninguna quiere salir conmigo. Si las muchachas me quieren, entonces todas quieren salir conmigo. Por lo tanto, no tengo mucho dinero.

Solución: Inicialmente se identifican las proposiciones simples del enunciado.

- **P**: $Tengo\ mucho\ dinero.$
- **Q**: $Soy\ muy\ guapo.$
- **R**: $Las\ muchachas\ me\ quieren.$
- **S**: $Las\ muchachas\ quieren\ salir\ conmigo.$

Ahora, de acuerdo al enunciado se escribe el argumento en notación de consecuentes identificando las premisas y la conclusión:

$$\begin{array}{ll} (P \land Q) \to R & (\boldsymbol{a}) \\ \neg S & (\boldsymbol{b}) \\ R \to S & (\boldsymbol{c}) \\ \hline \therefore \neg P & \end{array}$$

A continuación, se procede a demostrar el argumento mediante el uso de las reglas de inferencia:

	Pasos	Justificación
1	$\neg S$	Premisa **(b)**
2	$R \rightarrow S$	Premisa **(c)**
3	$\neg R$	Modus Tollens **pasos 1 y 2**
4	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	Premisa **(a)**
5	$\neg(P \wedge Q)$	Modus Tollens **pasos 3 y 4**
6	$\neg P \vee \neg Q$	Ley de Morgan **paso 5**

Conclusión: El argumento no es válido como está planteado, porque no se puede concluir $\neg P$ únicamente a partir de las premisas dadas lo más a lo que se puede concluir lógicamente es: $\neg P \vee \neg Q$