MATEMATICAS DISCRETAS 1
PARCIAL 1 – LOGICA PROPOSICIONAL

Nombre: ______________________SOLUCION________________________ **Identificación**: ______SOLUCION_______

1. **(15 %)** Empleando la siguiente lista de proposiciones atómicas:

p: `x + y` es válido en Python
q: `x*y` es válido en Python
r: `x**y` es válido en Python
s: `x*y` es una lista
t: `x + y` es una lista
u: `x` es un valor numérico
v: `y` es un valor numérico
w: `x` es una lista
z: `y` es una lista

Traduzca las siguientes afirmaciones sobre expresiones en Python a notación lógica:

a. `x**y` es válido en Python si y solo si tanto `x` como `y` son valores numéricos
b. `x + y` es válido en Python si y solo si `x` e `y` son ambos valores numéricos, o si ambos son listas.
c. `x * y` es válida en Python si y solo si `x` e `y` son ambos valores numéricos, o si uno de ellos es una lista y el otro es un valor numérico.
d. `x * y` es una lista si `x * y` es válida en Python y si `x` e `y` no son ambos valores numéricos.
e. Si `x + y` es una lista, entonces `x * y` no es una lista.
f. `x + y` y `x ** y` son ambas válidas en Python únicamente si `x` no es una lista.

Solución:

En la siguiente tabla se muestra la solución para cada uno de los enunciados:

Enunciado	**Expresión lógica**
a. `x**y` es válido en Python si y solo si tanto `x` como `y` son valores numéricos	$r \leftrightarrow (u \wedge v)$
b. `x + y` es válido en Python si y solo si `x` e `y` son ambos valores numéricos, o si ambos son listas.	$p \leftrightarrow \big((u \wedge v) \vee (w \wedge z)\big)$
c. `x * y` es válida en Python si y solo si `x` e `y` son ambos valores numéricos, o si uno de ellos es una lista y el otro es un valor numérico.	$q \leftrightarrow \Big((u \wedge v) \vee \big((u \wedge z) \vee (v \wedge w)\big)\Big)$
d. `x * y` es una lista si `x * y` es válida en Python y si `x` e `y` no son ambos valores numéricos.	$q \wedge \neg(u \wedge v) \rightarrow s$
e. Si `x + y` es una lista, entonces `x * y` no es una lista.	$t \rightarrow \neg s$
f. `x + y` y `x ** y` son ambas válidas en Python únicamente si `x` no es una lista.	$p \wedge r \rightarrow \neg w$

2. **(10 %)** Teniendo una gran visión de su educación, va a la corporación Prestigio y pregunta qué debe estudiar en la universidad para que se le contrate cuando se gradúe. El director de personal responde que se le contratará sólo si hace una carrera de matemáticas o en ciencias de la computación, obtiene un promedio de B o mejor y toma el curso de contabilidad. Teniendo en cuenta la información anterior:

a. Identifique cada una de las proposiciones simples.
b. Exprese empleando lógica proposicional dicho por el director de personal.

Solución:

a. A continuación, se identifican cada una de las proposiciones simples.

- $\boldsymbol{C}$: usted es contratado
- $\boldsymbol{M}$: usted estudia Matematicas
- $\boldsymbol{CS}$: usted estudia Ciencias de la computación
- $\boldsymbol{BS}$: usted obtiene un promedio de B o mejor

- $\boldsymbol{Cont}$: usted hace el curso de contabilidad

b. Teniendo en cuenta el enunciado, la expresión lógica de lo que le digo el director sigue la forma **P** solo si **Q** de modo que será un condicional $\boldsymbol{P} \rightarrow \boldsymbol{Q}$, donde:
- $\boldsymbol{P} \equiv (\boldsymbol{M} \vee \boldsymbol{CS}) \wedge \boldsymbol{BS} \wedge \boldsymbol{Cont}$
- $\boldsymbol{Q} \equiv \boldsymbol{C}$

De modo que expresado en lógica proposicional el director de personal le dijo:

$$(\boldsymbol{M} \vee \boldsymbol{CS}) \wedge \boldsymbol{BS} \wedge \boldsymbol{Cont} \rightarrow \boldsymbol{C}$$

3. **(10 %)** Considere las proposiciones $p \rightarrow (q \rightarrow q)$ y $(p \rightarrow q) \rightarrow q$. Determine el tipo de proposición que es cada una.

Solución:

Proposición: $p \rightarrow (q \rightarrow q)$

Usando tabla de verdad: Tenemos que:
- **Proposiciones**: p y q
- **Numero de filas**: $n = 2 \rightarrow f = 2^2 = 4$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{q \rightarrow q}$	$\boldsymbol{p \rightarrow (q \rightarrow q)}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

Luego, la proposición $p \rightarrow (q \rightarrow q)$ es una **tautología**.

Proposición: $(p \rightarrow q) \rightarrow q$

Usando tabla de verdad: Tenemos que:
- **Proposiciones**: p y q
- **Numero de filas**: $n = 2 \rightarrow f = 2^2 = 4$

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \rightarrow q}$	$\boldsymbol{(p \rightarrow q) \rightarrow q}$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

Luego, la proposición $(p \rightarrow q) \rightarrow q$ es una **contingencia**.

4. **(15 %)** Demuestre mediante el uso de tablas de verdad que la expresión $p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ es una tautología.

Solución:

Proposición: $p \oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$

Usando tabla de verdad: Tenemos que:
- **Proposiciones**: p y q
- **Numero de filas**: $n = 2 \rightarrow f = 2^2 = 4$

p	q	$p\oplus q$	$(p \vee q)$	$(p \wedge q)$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	$p\oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
0	0	0	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	1

Luego, la proposición $p\oplus q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ es una **tautología**.

5. **(20 %)** Mediante el uso de las identidades lógicas (usando la tabla de equivalencias lógicas), simplifique lo que mas pueda la expresión:

$$(\neg p \to q) \wedge \big((q \wedge p) \to \neg p\big)$$

Recomendación: Recuerde que simplificar es similar a demostrar, solo que en esta ocasión no se da el lado derecho de la equivalencia. El objetivo es que se logre una expresión más simple aplicando los axiomas de lógica proposicional (muy similar los ejercicios de identidades en Trigonometría).

Solución:

El procedimiento para llevar a cabo la demostración se describe a continuación:

	Procedimiento	Razón
1	$(\neg p \to q) \wedge \big((q \wedge p) \to \neg p\big)$	Expresión original
2	$(\neg(\neg p) \vee q) \wedge (\neg(q \wedge p) \vee \neg p)$	Implicación en 1
3	$(p \vee q) \wedge (\neg(q \wedge p) \vee \neg p)$	Doble negación en 2
4	$(p \vee q) \wedge \big((\neg q \vee \neg p) \vee \neg p\big)$	Ley de Morgan en 3
5	$(p \vee q) \wedge \big(\neg q \vee (\neg p \vee \neg p)\big)$	Propiedad asociativa para el **O** en 4
6	$(p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)$	Idempotencia para el para el **O** en 5
7	$(p \vee q) \wedge \neg(q \wedge p)$	Ley de Morgan para el **O** en 6
8	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	Propiedad conmutativa para el **Y** en 7
9	$p\oplus q$	Definición de **O** exclusivo en 8

6. **(20 %)** Mediante el empleo de las reglas de inferencia (dadas en la tabla) demuestre la validez para los siguientes argumentos lógicos:

$$\begin{array}{l} \neg p \to r \wedge \neg s \\ t \to s \\ u \to \neg p \\ \neg w \\ u \vee w \\ \hline \therefore \neg t \end{array}$$

Solución:

Rotulemos cada una de las premisas:

$$\begin{array}{ll} \neg p \to r \wedge \neg s & (\boldsymbol{a}) \\ t \to s & (\boldsymbol{b}) \\ u \to \neg p & (\boldsymbol{c}) \\ \neg w & (\boldsymbol{d}) \\ u \vee w & (\boldsymbol{e}) \\ \hline \therefore \neg t & \end{array}$$

A continuación, se procede a demostrar el argumento mediante el uso de las reglas de inferencia:

	Pasos	Justificación
1	$\neg p \rightarrow r \wedge \neg s$	Premisa **(a)**
2	$u \rightarrow \neg p$	Premisa **(c)**
3	$u \rightarrow r \wedge \neg s$	Transitividad **pasos 1 y 2**
4	$\neg w$	Premisa **(d)**
5	$u \vee w$	Premisa **(e)**
6	u	Eliminación **paso 5**
7	$r \wedge \neg s$	Modus Ponens **pasos 3 y 6**
8	$\neg s$	Simplificación **paso 7**
9	$t \rightarrow s$	Premisa **(b)**
10	$\neg s \rightarrow \neg t$	Contrarrecíproco **paso 9**
11	$\therefore \neg t$	Modus Ponens paso **10**