MATEMATICAS DISCRETAS 1
PARCIAL 2 – LOGICA CUANTIFICACIONAL

Nombre: ______________________SOLUCION___________________________ **Identificación**: ______SOLUCION_______

1. **(15 %)** Sea $\mathrm{A} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones (no olvide colocar el procedimiento o la sustentación):
   a. $\exists x \in A, x + 3 = 10$
   b. $\exists x \in A,\ x + 3 < 5$
   c. $\forall x \in A, x + 3 < 10$
   d. $\forall x \in A,\ x + 3 \leq 7$

   Solución:

   Antes de responder a la pregunta se va a tabular en la siguiente tabla para facilitar el análisis:

x	$x+3$
1	4
2	5
3	6
4	7
5	8

   Ahora, a partir de la tabla podemos proceder a responder las preguntas:

   a. $\exists x \in A, x + 3 = 10$: Tenemos que $\{x \in A, x + 3 = 10\} = \{\quad\}$ por lo tanto la proposición es **FALSA**.
   b. $\exists x \in A,\ x + 3 < 5$: Tenemos que $\{x \in A, x + 3 < 5\} = \{1\}$ por lo tanto la proposición es **VERDADERA**.
   c. $\forall x \in A, x + 3 < 10$: Tenemos que $\{x \in A, x + 3 < 10\} = \{1,2,3,4,5\} = A$, vemos que todos los elementos de A están incluidos, por lo tanto, la proposición es **VERDADERA**.
   d. $\forall x \in A,\ x + 3 \leq 7$: Tenemos que $\{x \in A, x + 3 < 10\} = \{1,2,3,4\}$, al no incluirse uno de los elementos de A (5) la proposición es **FALSA**.

2. **(15 %)** Determine el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones, donde $U = \{1, 2, 3\}$ es el conjunto universo (no olvide colocar el procedimiento o la sustentación):
   a. $\exists x \forall y, x^2 < y + 1$
   b. $\exists x \forall y, x^2 + y^2 < 12$
   c. $\forall x \forall y, x^2 + y^2 < 12$

   Solución:

   a. $\exists x \forall y, x^2 < y + 1$

   En la siguiente tabla realizamos el cálculo de la expresión de interés para cada uno de los elementos del universo:

		y		
	$x^2 < y+1$	1	2	3
x	1	$1 < 2$	$1 < 3$	$1 < 4$
	2	$4 < 2$	$4 < 3$	$4 < 4$
	3	$9 < 2$	$9 < 3$	$9 < 4$

   La proposición $\exists x \forall y, x^2 < y + 1$ se verdadera con que exista al menos un elemento x que haga que esta sea válida para todos los elementos de y, y en este caso vemos que $x = 1$ hace que la expresión sea válida para todos los valores de y por lo tanto la proposición es **VERDADERA**.

La siguiente tabla la usaremos para responder los numerales b y c.

		y		
	$x^2 + y^2 < 12$	1	2	3
x	1	$1 < 12$	$5 < 12$	$10 < 12$
	2	$5 < 12$	$8 < 12$	$13 < 12$
	3	$10 < 12$	$13 < 12$	$18 < 12$

b. $\exists x \forall y, x^2 + y^2 < 12$: En este caso $x = 1$ hace que la proposión sea **VERDADERA** para todos los valores de y (1,2,3).

c. $\forall x \forall y, x^2 + y^2 < 12$. Para este caso, con solo un par de valores que haga falsa la proposición es suficiente, si miramos la tabla $x = 3$ y $y = 2$, el resultado de $x^2 + y^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13$, tenemos que la proposición $13 < 12$ se hace FALSA. Por lo tanto, la proposición es **FALSA**.

3. **(16 %)** Sea $U = \{x | x \text{ es un animal}\}$. Traduzca cada una de las siguientes afirmaciones a expresiones lógicas usando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos (No olvide definir los predicados).
   a. Todos los animales tienen alas.
   b. Algunos animales vuelan.
   c. Algunos animales tienen alas y vuelan.
   d. Algunos animales tienen alas y no vuelan.
   e. Si es ave, entonces tiene alas.
   f. Si es ave, pone huevos y cacarea, entonces es gallina.
   g. Algunas gallinas no ponen huevos.
   h. Si es ave, no es mamífero.

Solución:
En la siguiente tabla se muestra la solución:

Afirmación	Predicados	Traducción
Todos los animales tienen alas	• x tiene alas: $Alas(x)$	$\forall x(Alas(x))$
Algunos animales vuelan.	• x vuela: $Vuela(x)$	$\exists x(Vuela(x))$
Algunos animales tienen alas y vuelan.	• x tiene alas: $Alas(x)$ • x vuela: $Vuela(x)$	$\exists x(Alas(x) \wedge Vuela(x))$
Algunos animales tienen alas y no vuelan.	• x tiene alas: $Alas(x)$ • x vuela: $Vuela(x)$	$\exists x(Alas(x) \wedge \neg Vuela(x))$
Si es ave, entonces tiene alas.	• x es ave: $Ave(x)$ • x tiene alas: $Alas(x)$	$Ave(x) \rightarrow Alas(x)$
Si es ave, pone huevos y cacarea, entonces es gallina.	• x es ave: $Ave(x)$ • x es pone huevos: $Huevos(x)$ • x es cacarea: $Cacarea(x)$ • x es una gallina: $Gallina(x)$	$Ave(x) \wedge Huevos(x) \wedge Cacarea(x) \rightarrow Gallina(x)$
Algunas gallinas no ponen huevos.	• x es pone huevos: $Huevos(x)$ • x es una gallina: $Gallina(x)$	$\exists x(Gallina(x) \wedge \neg Huevos(x))$
Si es ave, no es mamífero.	• x es ave: $Ave(x)$ • x es un mamífero: $Mamifero(x)$	$Ave(x) \rightarrow \neg Mamifero(x)$

4. **(20 %)** Reescriba cada una de estas afirmaciones de modo que las negaciones aparezcan solo dentro de los predicados (es decir, de modo que ninguna negación esté fuera de un cuantificador o una expresión que involucre conectores lógicos).
   a. $\neg\forall y\forall x\big(P(x,y) \vee Q(x,y)\big)$
   b. $\neg\forall x\big(\exists y\forall z P(x,y,z) \wedge \exists z\forall y P(x,y,z)\big)$

   Solución:

   a. $\neg\forall y\forall x\big(P(x,y) \vee Q(x,y)\big)$

   $$\begin{aligned}\neg\forall y\forall x\big(P(x,y) \vee Q(x,y)\big) &= \exists y\exists x\neg\big(P(x,y) \vee Q(x,y)\big)\\ &= \exists y\exists x\big(\neg P(x,y) \wedge \neg Q(x,y)\big)\end{aligned}$$

   b. $\neg\forall x\big(\exists y\forall z P(x,y,z) \wedge \exists z\forall y P(x,y,z)\big)$

   $$\begin{aligned}\neg\forall x\big(\exists y\forall z P(x,y,z) \wedge \exists z\forall y P(x,y,z)\big) &= \exists x\neg\big(\exists y\forall z P(x,y,z) \wedge \exists z\forall y P(x,y,z)\big)\\ &= \exists x\big(\neg\exists y\forall z P(x,y,z) \vee \neg\exists z\forall y P(x,y,z)\big)\\ &= \exists x\big(\forall y\exists z\neg P(x,y,z) \vee \forall z\exists y\neg P(x,y,z)\big)\end{aligned}$$

5. **(18 %)** A continuación, se muestra una tabla que describe las principales características de algunos lenguajes de programación que usted seguramente usará en el futuro:

Lenguaje	Paradigma	Tipado	Alcance
C	imperativo	débil	léxico
C++	orientado a objetos	débil	léxico
Java	orientado a objetos	fuerte	léxico
LaTeX	de scripts	débil	dinámico
ML	funcional	fuerte	léxico
Pascal	imperativo	fuerte	léxico
Perl	de scripts	débil	ambos
Scheme	funcional	débil	ambos

   Utilizando las características de la tabla anterior, **defina un solo predicado** que sea verdadero para cada una de las siguientes listas de lenguajes, y falso para cualquier otro lenguaje en la tabla. Por ejemplo, el predicado $P(x) =$ "x tiene tipado fuerte y x no es funcional" hace que $P(\text{Pascal})$ y $P(\text{Java})$ sean verdaderos, y hace que $P(x)$ sea falso para cada $x \in$ {C, C++, LaTeX, ML, Perl, Scheme}
   a. C, Pascal
   b. Pascal, Scheme, Perl
   c. LATEX, Java, C++, Perl

Solución:

A continuación, tenemos el predicado:

Predicado	**Valor de la verdad dependiendo del lenguaje**	
x es imperativo **Expresión formal**: $P_1(x) = Imperativo(x)$	Verdadero	C, Pascal
	Falso	C++, Java, Latex, ML, Perl, Scheme
x tiene alcance ambos o x es imperativo con tipado fuerte **Expresión formal**: $P_2(x) = Ambos(x) \vee Imperativo(x) \wedge Fuerte(x)$	Verdadero	Pascal, Scheme, Perl
	Falso	C++, Java, Latex, ML, Perl
x es orientado a objetos o de scripts **Expresión formal**: $P_3(x) = Objetos(x) \vee Scripts(x)$	Verdadero	Latex, Java, C++, Perl
	Falso	ML, Scheme, C, Pascal

6. **(16 %)** Use cuantificadores para expresar “Hay una mujer que ha tomado un vuelo en todas las aerolíneas del mundo”.

Solución:

Antes de empezar, rescribamos la oración “Hay una mujer que ha tomado un vuelo en todas las aerolíneas del mundo” de otra manera con el fin de facilitar la traducción:

“Hay una mujer que ha volado en todas las aerolíneas del mundo”

La definición del contexto es sumamente importante pues de este depende la traducción de la expresión. A continuación, mostramos dos posibles traducciones:

Oración	
“Hay una mujer que ha volado en todas las aerolíneas del mundo”	
Caso 1	**Caso 2**
Universo	**Universo y variables**
• U_1: Cualquier persona de sexo femenino • U_2: Cualquier aerolínea del mundo	• U_1: Cualquier persona • U_2: Cualquier aerolínea del mundo
Variables	**Variables**
• x: es cualquier mujer ($x \in U_1$) • y: es una aerolínea cualquiera ($x \in U_2$)	• x: es cualquier persona ($x \in U_1$) • y: es una aerolínea cualquiera ($x \in U_2$)
Predicados	**Predicados**
• $V(x, y)$: x ha volado en la aerolínea y	• $M(x)$: es una mujer • $V(x, y)$: x ha volado en la aerolínea y
Traducción	
$\exists x \forall y (V(x, y))$	$\exists x \left(M(x) \wedge \forall y (V(x, y)) \right)$