MATEMATICAS DISCRETAS 1
PARCIAL 2 – LOGICA CUANTIFICACIONAL

Nombre: ______________________SOLUCION_________________________ **Identificación**: _____SOLUCION______

1. **(20 %)** Sea $Q(x,y)$ la afirmación "$x+y=x-y$". Si el dominio de ambas variables está compuesto por todos los números enteros, ¿cuáles son los valores de verdad?
   a. $\forall y\, Q(1,y)$
   b. $\exists x\, Q(x,2)$
   c. $\exists x \exists y\, Q(x,y)$
   d. $\forall x \exists y\, Q(x,y)$

Solución:

a. $\forall y\, Q(1,y)$

En este caso tenemos que:

$$\forall y\, Q(1,y) = \forall y \in \mathbb{Z}(1+y=1-y) \rightarrow \forall y \in \mathbb{Z}(y=0)$$

Si empezamos asumiendo que $\forall y\, Q(1,y)$ es **VERDADERA**. Si tomamos un valor para y, por ejemplo $y=1$; la proposición quedaría $1=0$ lo cual es **FALSO**, lo cual contradice lo expresado originalmente en la proposición, la cual solo es verdadera cuando $y=1$ y no para todo y como lo expresa el enunciado. Luego:

$\forall y\, Q(1,y)$ es **FALSO**

b. $\exists x\, Q(x,2)$

En este caso tenemos que:

$$\exists x\, Q(x,2) = \exists x(x+2=x-2) \rightarrow \exists x(4=0)$$

Si se analiza la $\exists x\, Q(x,2) = \exists x(4=0)$ vemos que el enunciado siempre será **FALSO** sin importar el valor de x. Por lo que al no haber ningún valor de x que haga que la proposición sea verdadera decimos que no existe ninguna x que haga que se cumpla la proposición, por lo tanto:

$\exists x\, Q(x,2)$ es **FALSO**

c. $\exists x \exists y\, Q(x,y)$

Para este caso, con que se encuentre un solo par de valores que haga que la proposición sea verdadera es suficiente. Por ejemplo, si elegimos $(x,y)=(0,0)$, tenemos que la proposición será:

$$x+y=x-y \rightarrow 0+0=0-0 \rightarrow 0=0 \rightarrow \mathbf{VERDADERO}$$

Por lo tanto, si existen valores de x y y que hagan que la proposición sea verdadera, luego:

$\exists x \exists y\, Q(x,y)$ es **VERDADERO**

d. $\forall x \exists y\, Q(x,y)$

Esta proposición está diciendo que para todos los valores enteros que toma x existe al menos un y que hace que la expresión $x + y = x - y$ sea **VERDADERA** lo cual podemos demostrar si logramos encontrar un valor de y que cumpla esto:

		y
	$x + y = x - y$	0
x	1	$1 + 0 = 1 - 0$
	2	$2 + 0 = 2 - 0$
	…	…

De la tabla anterior, podemos ver que la proposición anterior es verdadera para $y = 0$, por lo tanto, tenemos que si existe un valor de y que haga que esta se cumpla, luego:

$\forall x \exists y\, Q(x, y)$ es **VERDADERA**.

2. **(20 %)** Dados los siguientes predicados:
- $p(x)$: $x^2 - 8x + 15 = 0$
- $q(x)$: $x\ es\ impar$
- $r(x)$: $x > 0$

Para el universo de todos los números enteros, determine la verdad o falsedad de cada uno de los siguientes enunciados. Si un enunciado es falso, proporcione un contraejemplo.

a. $\forall x[p(x) \to q(x)]$
b. $\exists x[p(x) \to q(x)]$
c. $\exists x[r(x) \to p(x)]$
d. $\forall x[\neg q(x) \to \neg p(x)]$
e. $\forall x[(p(x) \vee q(x)) \to r(x)]$

Solución:
En la siguiente tabla se muestra la solución:

<table>
<tr><th>Afirmación</th><th>Enunciado en lenguaje natural</th><th>Valor de verdad</th></tr>
<tr><td>$\forall x[p(x) \to q(x)]$</td><td>Para todo x, Si $x^2 - 8x + 15 = 0$ entonces x es impar.</td><td>Si se resuelve la expresión tenemos que:

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

Por lo tanto, la solución es: $x = 3$ y $x = 5$. Como la función proposicional es una implicación nos interesa analizar los casos particulares cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso para estos valores ya que para lo demás valores de x la expresión condicional es verdadera:

<table>
<tr><th>x</th><th>$p(x)$</th><th>$q(x)$</th><th>$p(x) \to q(x)$</th></tr>
<tr><td>3</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
<tr><td>5</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
</table>

Luego, la proposición es:

$\forall x[p(x) \to q(x)]$ es **VERDADERA**</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr>
<td>$\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]$</td>
<td>Existe algún x, tal que si $x^2 - 8x + 15 = 0$ entonces x es impar.</td>
<td>En el punto anterior llegamos a la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>x</th><th>$p(x)$</th><th>$q(x)$</th><th>$p(x) \rightarrow q(x)$</th></tr>
<tr><td>3</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
<tr><td>5</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
</table>

En esta se demuestra que si existe al menos un valor de x que hace que la proposición será verdadera. Para este caso son dos los valores de x que validan esto: $x = 3$ y $x = 5$. Por lo tanto:

$\exists x[p(x) \rightarrow q(x)]$ es **VERDADERA**</td>
</tr>
<tr>
<td>$\exists x[r(x) \rightarrow p(x)]$</td>
<td>Existe algún x, tal que si $x > 0$ entonces $x^2 - 8x + 15 = 0$.</td>
<td>Evaluemos la siguiente tabla para los valores de x que hacen que la proposición $r(x) \rightarrow p(x)$ sea verdadera:

<table>
<tr><th>x</th><th>$r(x)$</th><th>$p(x)$</th><th>$r(x) \rightarrow p(x)$</th></tr>
<tr><td>3</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
<tr><td>5</td><td>V</td><td>V</td><td>V</td></tr>
</table>

Luego, como existe al menos un valor de x que hace la proposición verdadera, entonces:

$\exists x[r(x) \rightarrow p(x)]$ es **VERDADERA**</td>
</tr>
<tr>
<td>$\forall x[\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)]$</td>
<td>Para todo x, Si x no es impar entonces $x^2 - 8x + 15 \neq 0$ entonces.</td>
<td>Como la función proposicional $\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)$ es el contra reciproco de $p(x) \rightarrow q(x)$ (analizado al principio), entonces:

$p(x) \rightarrow q(x) \equiv \neg q(x) \rightarrow \neg p(x)$

Por lo tanto

$\forall x[\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)] \equiv \forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$

Y como $\forall x[p(x) \rightarrow q(x)]$ es **VERDADERA** entonces tenemos que:

$\forall x[\neg q(x) \rightarrow \neg p(x)]$ es **VERDADERA**</td>
</tr>
<tr>
<td>$\forall x[(p(x) \vee q(x)) \rightarrow r(x)]$</td>
<td>Para todo x, Si x es impar o $x^2 - 8x + 15 = 0$ entonces $x > 0$.</td>
<td>Vamos a realizar una prueba para $x = -3$ el cual es un número impar:
• $p(-3) = (-3)^2 - 8(-3) + 15 = 0 \equiv F$
• $q(-3) = -3 \text{ es impar } \equiv V$
• $r(-3) = -3 > 0 \equiv F$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td>
<table>
<tr><td>x</td><td>$p(x) \vee q(x)$</td><td>$r(x)$</td><td>$\big(p(x) \vee q(x)\big) \to r(x)$</td></tr>
<tr><td>-3</td><td>V</td><td>F</td><td>F</td></tr>
</table>
Como la proposición es FALSA para un solo caso, entonces es FALSA para todos los valores de x de modo que:
$\forall x\big[\big(p(x) \vee q(x)\big) \to r(x)\big]$ es FALSA
</td>
</tr>
</table>

3. **(20 %)** La clase de mecánica del Profesor Carlson está compuesta por 29 estudiantes de los cuales exactamente:
   a. Tres estudiantes de física son de tercer año (juniors).
   b. Dos estudiantes de ingeniería eléctrica son de tercer año (juniors).
   c. Cuatro estudiantes de matemáticas son de tercer año (juniors).
   d. Doce estudiantes de física son de cuarto año (seniors).
   e. Cuatro estudiantes de ingeniería eléctrica son de cuarto año (seniors).
   f. Dos estudiantes de ingeniería eléctrica son estudiantes de posgrado (graduate students).
   g. Dos estudiantes de matemáticas son estudiantes de posgrado (graduate students).

Considere los siguientes predicados:

- $c(x)$: x es un estudiante de la clase (es decir, de la clase de mecánica del profesor Carlson).
- $j(x)$: El estudiante x es de tercer año (junior)
- $s(x)$: El estudiante x es de cuarto año (senior)
- $g(x)$: El estudiante x es un estudiante de posgrado.
- $p(x)$: El estudiante x es físico.
- $e(x)$: El estudiante x es ingeniero eléctrico.
- $m(x)$: El estudiante x es matemático.

Escriba cada uno de los siguientes enunciados empleando cuantificadores y los predicados anteriores y determine si el enunciado dado es **verdadero** o **falso**. Aquí el universo comprende a los 12500 estudiantes matriculados en la universidad donde enseña el Profesor Carlson. Además, en esta universidad cada estudiante solo estudia una sola carrera.

a. Hay un matemático en la clase que es de tercer año (junior)
b. Hay un estudiante de cuarto año (senior) en la clase que no es matemático.
c. Cada estudiante de la clase es matemático o físico.
d. Ningún estudiante de posgrado en la clase es físico.
e. Cada estudiante de cuarto año (senior) en la clase se está estudiando física o ingeniería eléctrica.

Solución:

En la siguiente tabla se muestra la traducción de la proposición en lenguaje natural a la respectiva formula en lenguaje formal valiéndonos de las Formas Aristotélicas y los predicados definidos en el enunciado:

Enunciado en lenguaje natural	**Expresión formal**
Hay un matemático en la clase que es de tercer año (junior)	$\exists x[c(x) \wedge m(x) \wedge j(x)]$
Hay un estudiante de cuarto año (senior) en la clase que no es matemático.	$\exists x[c(x) \wedge \neg m(x) \wedge s(x)]$

Cada estudiante de la clase es matemático o físico.	$\forall x[c(x) \to m(x) \land p(x)]$
Ningún estudiante de posgrado en la clase es físico.	$\forall x\big[\big(c(x) \land g(x)\big) \to \neg p(x)\big] \equiv \neg\exists x[c(x) \land g(x) \land p(x)]$
Cada estudiante de cuarto año (senior) en la clase se está estudiando física o ingeniería eléctrica.	$\forall x\big[\big(c(x) \land s(x)\big) \to \big(p(x) \lor e(x)\big)\big]$

4. **(20 %)** Obtenga las negaciones de las siguientes expresiones con cuantificadores.
   a. $\forall x\exists y\big[\big(p(x,y) \land q(x,y)\big) \to r(x,y)\big]$
   b. $\exists x\exists y\neg p(x,y) \land \forall x\exists y q(x,y)$

Solución:

a. $\neg\Big[\forall x\exists y\big[\big(p(x,y) \land q(x,y)\big) \to r(x,y)\big]\Big]$

$$\begin{aligned}
\neg\Big[\forall x\exists y\big[\big(p(x,y) \land q(x,y)\big) \to r(x,y)\big]\Big] &\equiv \exists x\forall y\neg\big[\big(p(x,y) \land q(x,y)\big) \to r(x,y)\big] \\
&\equiv \exists x\forall y\neg\big[\neg\big(p(x,y) \land q(x,y)\big) \lor r(x,y)\big] \\
&\equiv \exists x\forall y\Big[\neg\Big(\neg\big(p(x,y) \land q(x,y)\big)\Big) \land \neg r(x,y)\Big] \\
&\equiv \exists x\forall y[p(x,y) \land q(x,y) \land \neg r(x,y)]
\end{aligned}$$

b. $\neg\forall x\big(\exists x\exists y\neg p(x,y) \land \forall x\exists y q(x,y)\big)$

$$\begin{aligned}
\neg\forall x\big(\exists x\exists y\neg p(x,y) \land \forall x\exists y q(x,y)\big) &\equiv \exists x\neg\big(\exists x\exists y\neg p(x,y) \land \forall x\exists y q(x,y)\big) \\
&\equiv \exists x\Big(\neg\big(\exists x\exists y\neg p(x,y)\big) \lor \neg\big(\forall x\exists y q(x,y)\big)\Big) \\
&\equiv \exists x\Big(\forall x\forall y\big(\neg\neg p(x,y)\big) \quad \lor \exists x\forall y\big(\neg q(x,y)\big)\Big) \\
&\equiv \exists x\Big(\forall x\forall y\big(p(x,y)\big) \lor \exists x\forall y\big(\neg q(x,y)\big)\Big)
\end{aligned}$$

5. **(20 %)** Considere el conjunto de premisas y la conclusión que se dan a continuación:

Toda persona en Nueva Jersey vive a menos de 50 millas del océano. Alguien en Nueva Jersey nunca ha visto el océano. Por lo tanto, alguien que vive a menos de 50 millas del océano nunca ha visto el océano.

Empleando lógica cuantificacional, realice las siguientes actividades:

a. Defina el universo de discurso y los predicados asociados.
b. Empleando los predicados definidos en el punto anterior, reescriba en lenguaje formal las premisas y las conclusiones.
c. Empleando las equivalencias y expresiones válidas para la lógica cuantificacional, realice la demostración.

Solución:

a. **Universo de discurso y predicados**:

- **Universo de discurso**: $U = \{x | x \text{ es una persona}\}$
- **Predicados**:
  1. $\boldsymbol{p(x)}$: x es habitante de Nueva Jersey

2. $\boldsymbol{q(x)}$: x vive a menos de 50 millas del océano
3. $\boldsymbol{r(x)}$: x ha visto el oceano

b. **Premisas y conclusión**:

$$\begin{array}{l} \forall x\big(p(x) \to q(x)\big) \\ \exists x\big(p(x) \land \neg r(x)\big) \\ \hline \therefore \exists x\big(q(x) \land \neg r(x)\big) \end{array}$$

c. **Demostración**:

Rotulemos cada una de las premisas:

$$\begin{array}{ll} \forall x\big(p(x) \to q(x)\big) & (\boldsymbol{a}) \\ \exists x\big(p(x) \land \neg r(x)\big) & (\boldsymbol{b}) \\ \hline \therefore \exists x(q(x) \land \neg r(x)) & \end{array}$$

A continuación, se procede a demostrar el argumento mediante el uso de las reglas de inferencia:

	Pasos	Justificación
1	$\forall x\big(p(x) \to q(x)\big)$	Premisa **(a)**
2	$\exists x\big(p(x) \land \neg r(x)\big)$	Premisa **(b)**
3	$p(K) \to q(K)$	Particularización universal ($x = K$) en **1**
4	$p(K) \land \neg r(K)$	Particularización existencial ($x = K$) en **2**
5	$p(K)$	Simplificación en **4**
6	$\neg r(K)$	Simplificación en **4**
7	$q(K)$	Modus Ponens en **5 y 3**
8	$q(K) \land \neg r(K)$	Simplificación **paso 7**
9	$\therefore \exists x\big(q(x) \land \neg r(x)\big)$	Generalización existencial en **8**