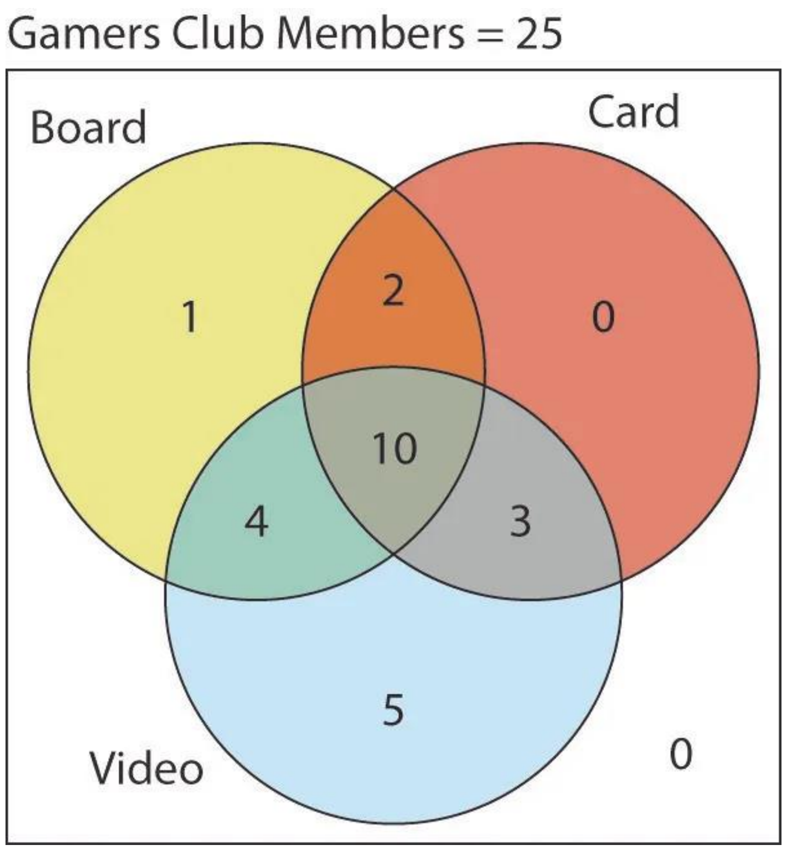
MATEMATICAS DISCRETAS 1
PARCIAL 3 – RELACIONES Y CONJUNTOS

Nombre: ________SOLUCION________ **Identificación**: ____SOLUCION____

Conjuntos

1. **(15 %)** Un club de jugadores en la Escuela Secundaria de Springfield, compuesto por 25 miembros, fue encuestado para averiguar quiénes jugaban juegos de mesa (Board), juegos de cartas (Card) o videojuegos (Video). Teniendo en cuenta el diagrama de Venn mostrado a continuación:

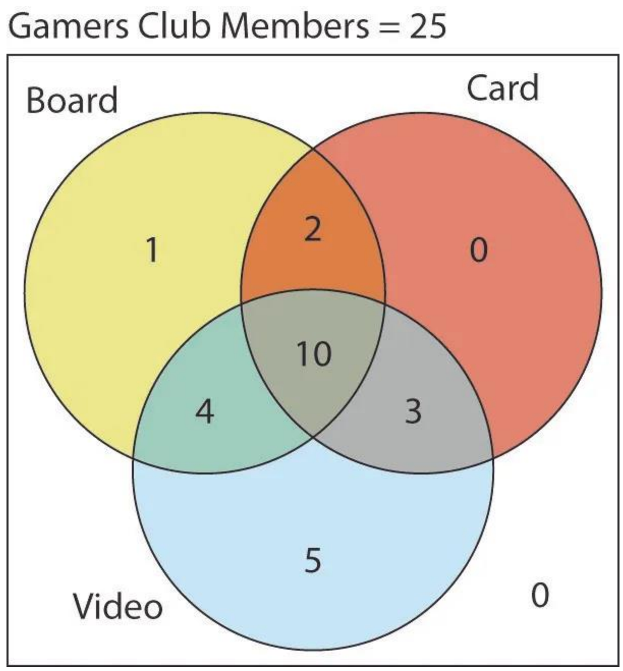


Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuántos miembros del club de jugadores practican los tres tipos de juegos: juegos de mesa, juegos de cartas y videojuegos?
b. ¿Cuántos jugadores están en el conjunto "Juegos de Mesa ∩ Videojuegos"?
c. Si Javier está en la región con un total de tres miembros, ¿qué tipo de juegos juega?
d. ¿Cuántos jugadores juegan videojuegos?
e. ¿Cuántos jugadores están en el conjunto "Juegos de Mesa ∪ Juegos de Cartas"?
f. ¿Cuántos miembros del club de jugadores no juegan videojuegos?
g. ¿Cuántos miembros de este club solo juegan juegos de mesa?
h. ¿Cuántos miembros de este club solo juegan videojuegos?
i. ¿Cuántos miembros del club de jugadores juegan videojuegos y juegos de cartas?
j. ¿Cuántos miembros del club de jugadores están en el conjunto "Cartas'"?

Solución:

A partir del diagrama de Venn podemos obtener la siguiente información:



Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuántos miembros del club de jugadores practican los tres tipos de juegos: juegos de mesa, juegos de cartas y videojuegos?

$$n(Board \cap Card \cap Video) = 10$$

b. ¿Cuántos jugadores están en el conjunto "Juegos de Mesa ∩ Videojuegos"?

$$n(Board \cap Video) = 4 + 10 = 14$$

c. Si Javier está en la región con un total de tres miembros, ¿qué tipo de juegos juega?

Javier juega cartas y videojuegos.

d. ¿Cuántos jugadores juegan videojuegos?

$$n(Video) = 5 + 4 + 10 + 3 = 22$$

e. ¿Cuántos jugadores están en el conjunto "Juegos de Mesa ∪ Juegos de Cartas"?

$$n(Board \cup Card) = 1 + 2 + 10 + 4 + 0 + 3 = 20$$

f. ¿Cuántos miembros del club de jugadores no juegan videojuegos?

$$n(Video') = 1 + 2 + 0 = 3$$

g. ¿Cuántos miembros de este club solo juegan juegos de mesa?

$$n(solo\ Board) = 1$$

h. ¿Cuántos miembros de este club solo juegan videojuegos?

$$n(solo\ Video) = 5$$

i. ¿Cuántos miembros del club de jugadores juegan videojuegos y juegos de cartas?

$$n(Card \cap Video) = 10 + 3 = 13$$

j. ¿Cuántos miembros del club de jugadores están en el conjunto "Cartas'"?

$$n(Card) = 2 + 10 + 3 + 0 = 15$$

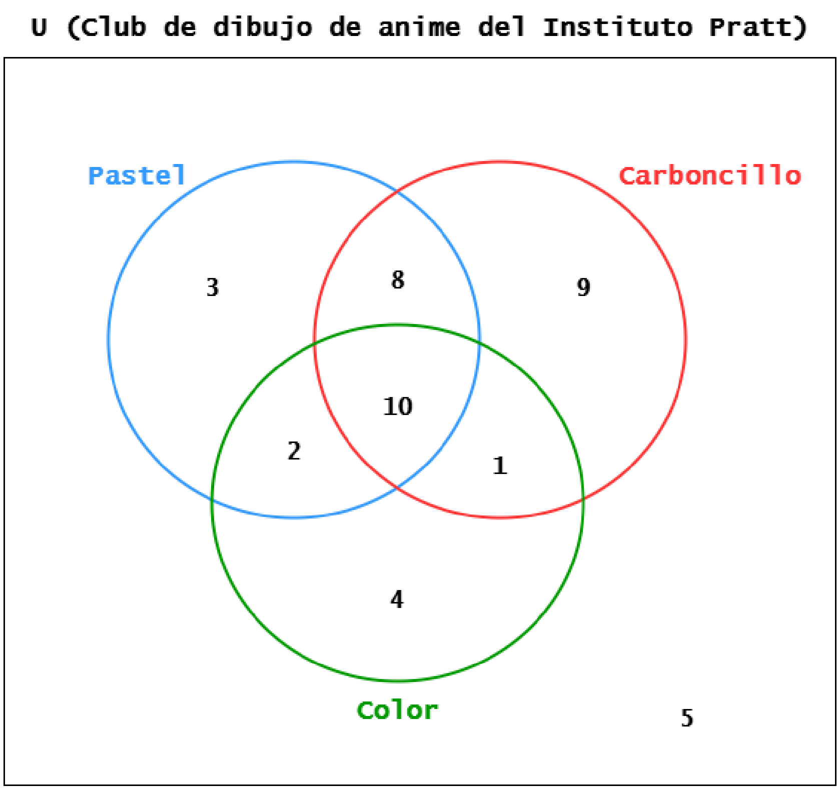
2. (**10%**) El club de dibujo de anime del Instituto Pratt realizó una encuesta a sus 42 miembros y descubrió que 23 dibujaban con pastel, 28 con carboncillo y 17 con lápices de colores. De estos, 10 usaban las tres técnicas, 18 con carboncillo y pastel, 11 con lápices de colores y carboncillo, y 12 con lápices de colores y pastel. El resto no usaba ninguna de estas tres técnicas. A partir de la información dada anteriormente dibuje claramente el diagrama de Venn asociado.

Solución:

Para el caso dado, tenemos los siguientes datos:

- $n(U) = 42$
- $n(Pastel) = 23$
- $n(Carboncillo) = 28$
- $n(Color) = 17$
- $n(Pastel \cap Carboncillo \cap Color) = 10$
- $n(Pastel \cap Carboncillo) = 18$
- $n(Color \cap Carboncillo) = 11$
- $n(Color \cap Pastel) = 12$

Luego, a partir de la información anterior podemos proceder a dibujar el diagrama de Venn.



3. (**15%**) Suponga que $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ es el conjunto universal y que:

$$\mathrm{A} = \{n | n \leq 6\} \qquad \mathrm{B} = \{n | 4 \leq n \leq 9\} \qquad \mathrm{C} = \{1,3,5,7,9\} \qquad \mathrm{D} = \{2,3,5,7,8\}$$

Encuentre:
a. $A \oplus B$
b. $B \oplus C$
c. $A \cap (B \oplus D)$
d. $(A \cap B) \oplus (A \cap D)$

Solución:
Inicialmente expresemos todos los conjuntos por extensión:

$$\mathrm{A} = \{1,2,3,4,5,6\} \qquad \mathrm{B} = \{4,5,6,7,8,9\} \qquad \mathrm{C} = \{1,3,5,7,9\} \qquad \mathrm{D} = \{2,3,5,7,8\}$$

Ahora si procedamos a obtener los elementos para cada caso:

a. $A \oplus B$

$$\begin{aligned} A \oplus B &= A \cup B - A \cap B \\ &= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{4,5,6\} \\ &= \{1,2,3,7,8,9\} \end{aligned}$$

b. $B \oplus C$

$$\begin{aligned} B \oplus C &= B \cup C - B \cap C \\ &= \{1,3,4,5,6,7,8,9\} - \{5,7,9\} \\ &= \{1,3,4,6,8\} \end{aligned}$$

c. $A \cap (B \oplus D)$

Antes de resolver la expresión completa vamos a obtener:

$$\begin{aligned} B \oplus D &= B \cup D - B \cap D \\ &= \{2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{5,7,8\} \\ &= \{2,3,4,6,9\} \end{aligned}$$

Ahora si obtengamos la expresión $A \cap (B \oplus D)$

$$\begin{aligned} A \cap (B \oplus D) &= \{1,2,3,4,5,6\} \cap \{2,3,4,6,9\} \\ &= \{2,3,4,6\} \end{aligned}$$

d. $(A \cap B) \oplus (A \cap D)$

$$\begin{aligned} (A \cap B) \oplus (A \cap D) &= \{4,5,6\} \oplus \{2,3,5\} \\ &= (\{4,5,6\} \cup \{2,3,5\}) - (\{4,5,6\} \cap \{2,3,5\}) \\ &= \{2,3,4,5,6\} - \{5\} \\ &= \{2,3,4,6\} \end{aligned}$$

Relaciones

4. **(15 %)** Sean los conjuntos $A = \{2,4\}$ y $B = \{6,8,10\}$ y R y S relaciones de $A\ a\ B$ las cual se definen como sigue: Para todo $(x,y) \in A \times B$,

$xRy \Leftrightarrow x\|y$
$xSy \Leftrightarrow y - 4 = x$

Establezca explícitamente los pares ordenados:

a. $A \times B$
b. R
c. S
d. $R \cup S$
e. $R \cap S$

Solución:

a. $A \times B$

$A \times B = \{(x,y)|x \in A, x \in B\} = \{(2,6),(2,8),(2,10),(4,6),(4,8),(4,10)\}$

b. R

$R = \{(x,y)|x \text{ divide } y\} = \{(2,6),(2,8),(2,10),(4,8)\}$

c. S

$R = \{(x,y)|y - 4 = x\} = \{(2,6),(4,8)\}$

d. $R \cup S$

$$R \cup S = \{(2,6),(2,8),(2,10),(4,8)\} \cup \{(2,6),(4,8)\} = \{(2,6),(2,8),(2,10),(4,8)\}$$

e. $R \cap S$

$$R \cup S = \{(2,6),(2,8),(2,10),(4,8)\} \cap \{(2,6),(4,8)\} = \{(2,6),(4,8)\}$$

5. **(25 %)** Teniendo en cuenta el conjunto de prerrequisitos para las clases de CS mostradas en la siguiente tabla.

Curso	**Prerrequisitos**
CS182	CS51, CS121
CS121	CS20
CS124	CS50, CS51, CS121, Stat110
CS51	CS50
CS61	CS50
CS20	Ninguno
CS50	Ninguno
Stat110	Ninguno

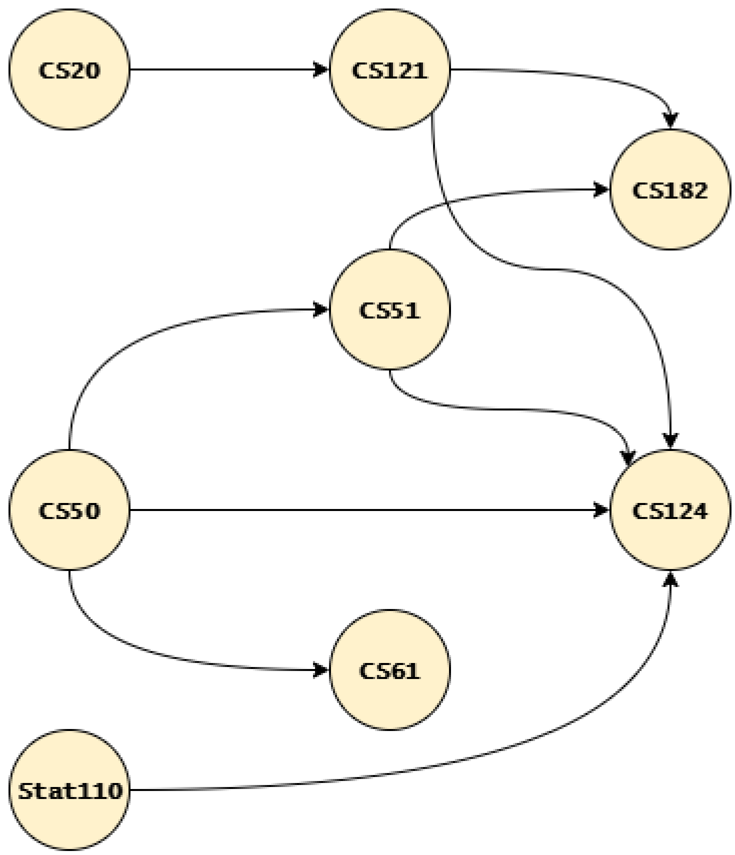
Se pide:

a. Dibuje el gráfo dirigido que representa estos prerrequisitos, donde los vértices representan clases y donde un arco de x a y significa que x es un prerrequisito para y.

b. Obtenga la representación matricial asociada al dígrafo.
c. Obtenga la representación como pares de puntos.
d. Se puede afirmar que la relación anterior es una relación de orden parcial. Sustente la respuesta.
e. En caso de que esta sea una relación de orden parcial, obtenga el diagrama de Hasse.

Solución:

a. Dibuje el gráfo dirigido que representa estos prerrequisitos, donde los vértices representan clases y donde un arco de x a y significa que x es un prerrequisito para y.



b. Obtenga la representación matricial asociada al dígrafo.

Empecemos con la tabla para visualizar más fácil el resultado:

x / y	CS182	CS121	CS124	CS51	CS61	CS20	CS50	Stat110
CS182								
CS121	X		X					
CS124								
CS51	X		X					
CS61								
CS20		X						
CS50			X	X	X			
Stat110			X					

Ahora, a partir de la tabla anterior podemos llegar a la matriz asociada a la relación:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Obtenga la representación como pares de puntos.

A partir de la tabla tenemos los siguientes pares de puntos para la relación:

$$R = \left\{ \begin{array}{c} (CS51, CS182), (CS121, CS182), \\ (CS20, CS121), \\ (CS50, CS124), (CS51, CS124), (CS121, CS124), (Stat110, CS124), \\ (CS50, CS51), \\ (CS50, CS61), \end{array} \right\}$$

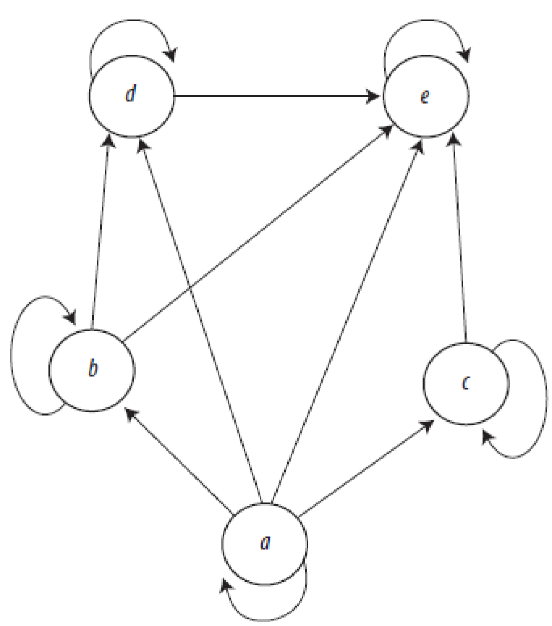
d. Se puede afirmar que la relación anterior es una relación de orden parcial. Sustente la respuesta.

Una relación R sea una relación de orden parcial debe cumplir las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva. Al inspeccionar la matriz binaria vemos que ningún elemento de la diagonal principal es 1, entonces **no se cumple la propiedad reflexiva** y, por lo tanto, R no es **una relación de orden**.

e. En caso de que esta sea una relación de orden parcial, obtenga el diagrama de Hasse.

Como la relación R no es de orden, no tiene representación como un diagrama de Hasse.

6. **(20 %)** El dígrafo mostrado a continuación, representa una relación de orden parcial:



a. Obtenga la representación como pares de puntos de la relación.

b. Obtenga la representación como diagrama de Hasse de la relación.
c. Determine los extremos de la relación.

Solución:

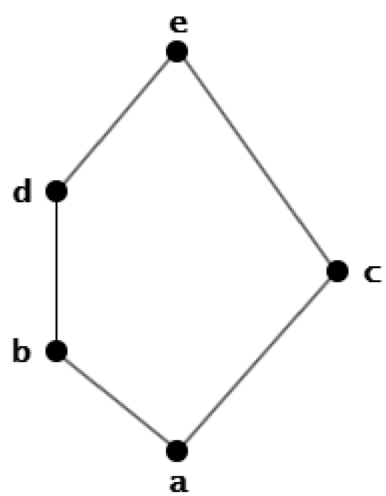
a. Obtenga la representación como pares de puntos de la relación.

A partir del dígrafo podemos obtener la siguiente representación como pares de puntos

$$R = \left\{ \begin{matrix} (a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e), \\ (b,b),(b,d),(b,e), \\ (c,c),(c,e), \\ (d,d),(d,e), \\ (e,e) \end{matrix} \right\}$$

b. Obtenga la representación como diagrama de Hasse de la relación.

A continuación, se muestra el diagrama de Hasse de la relación R:



c. Determine los extremos de la relación.

De acuerdo al diagrama de Hasse anterior tenemos los siguientes extremos para la relación:

- **Maximales**: $\{e\}$
- **Minimales**: $\{a\}$
- **Máximo**: e
- **Mínimo**: a