MATEMATICAS DISCRETAS 1
PARCIAL 3 – RELACIONES Y CONJUNTOS

Nombre: ___________SOLUCION___________ **Identificación**: ______SOLUCION______

Conjuntos

1. **(15 %)** En una encuesta realizada a un grupo de profesores donde todos respondieron reveló que 450 tiene casa propia; 260 tienen automóvil: 360 tienen computador; 200 tienen casa y automóvil; 250 tienen casa y computador; 150 tienen automóvil y computador, y 100 tienen casa, automóvil y computador. Se pide:
   a. **(5 %)** Dibuje el diagrama de Venn donde se represente la situación descrita en el problema.
   b. **(2 %)** ¿Cuántos fueron los profesores encuestados?
   c. **(2 %)** ¿Cuántas personas tienen solamente casa propia?
   d. **(2 %)** ¿Cuántas personas tienen solamente automóvil?
   e. **(2 %)** ¿Cuántas personas tiene casa y automóvil, pero no tienen computador?
   f. **(2 %)** ¿Cuántas personas tienen casa y computador, pero no automóvil?

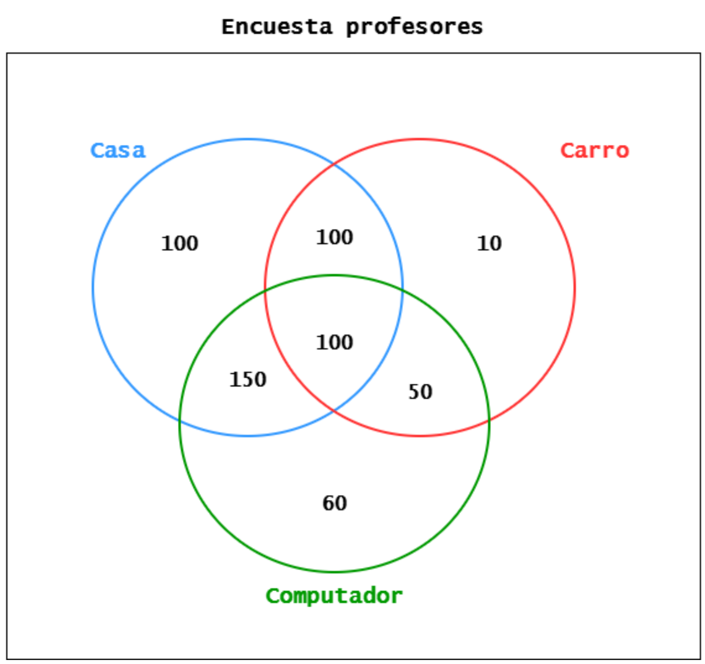
Solución:

Para el caso dado, tenemos los siguientes datos:

- $n(Casa) = 450$
- $n(Carro) = 260$
- $n(Computador) = 360$
- $n(Casa \cap Carro) = 200$
- $n(Casa \cap Computador) = 250$
- $n(Carro \cap Computador) = 150$
- $n(Casa \cap Carro \cap Computador) = 100$

Luego, a partir de la información anterior podemos proceder a dibujar el diagrama de Venn.

a. Dibuje el diagrama de Venn donde se represente la situación descrita en el problema.



b. ¿Cuántos fueron los profesores encuestados?

Todos los profesores encuestados constituyen el conjunto universal U los cuales podemos deducir del diagrama de Venn construido en el punto anterior:

$$n(U) = 100 + 10 + 60 + 100 + 50 + 150 + 100 = 570$$

c. ¿Cuántas personas tienen solamente casa propia?

Del diagrama de Venn tenemos que:

$n(Casa \cap Carro' \cap Computador') =$

$n(Casa) - n(Casa \cap Carro \cap Computador') - n(Casa \cap Carro \cap Computador) - n(Casa \cap Carro \cap Computador) =$

$450 - 100 - 100 - 150 =$

100

De modo que:

$$n(solo\ Casa) = n(Casa \cap Carro' \cap Computador') = 100$$

d. ¿Cuántas personas tienen solamente automóvil?

Del diagrama de Venn tenemos que:

$n(Casa' \cap Carro \cap Computador') =$

$n(Carro) - n(Casa \cap Carro \cap Computador) - n(Casa' \cap Carro \cap Computador') - n(Casa' \cap Carro \cap Computador) =$

$260 - 100 - 100 - 50 =$

10

De modo que:

$$n(solo\ Carro) = n(Casa' \cap Carro \cap Computador') = 10$$

e. ¿Cuántas personas tiene casa y automóvil, pero no tienen computador?

Del diagrama de Venn nos preguntan:

$n(Casa \cap Carro \cap Computador') =$

$n(Casa \cap Carro) - n(Casa \cap Carro \cap Computador) =$

$200 - 100 = 100$

De modo que:

$$n(Casa \cap Carro \cap Computador') = 100$$

g. ¿Cuántas personas tienen casa y computador, pero no automóvil?

Del diagrama de Venn nos preguntan:

$n(Casa \cap Carro' \cap Computador) =$

$n(Casa \cap Computador) - n(Casa \cap Carro \cap Computador) =$

$250 - 100 = 150$

De modo que:

$$n(Casa \cap Carro' \cap Computador) = 150$$

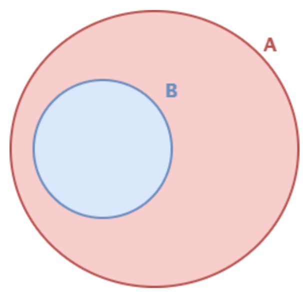
2. (**10%**) Que podemos decir de los conjuntos A y B si conocemos que.
   a. **(2 %)** $A \cup B = A$
   b. **(2 %)** $A \cap B = A$
   c. **(2 %)** $A - B = A$
   d. **(2 %)** $A \cap B = B \cap A$
   e. **(2 %)** $A - B = B - A$

Solución:

Para responder a estas preguntas vamos a basarnos en los diagramas de Venn:

a. $A \cup B = A$

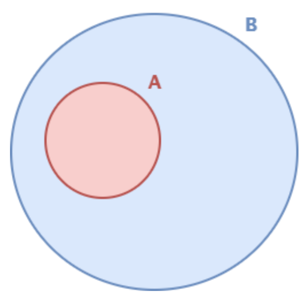
Observemos que si $B \subseteq A$ el diagrama de Venn es:



Vemos que todos los elementos de B se encuentran en A y por lo tanto, para esta situación al unir los elementos de $A \cup B$ equivale a A pues los elementos son exactamente los mismos.

b. $A \cap B = A$

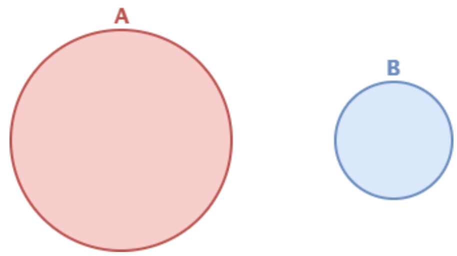
En esta situación tenemos el caso opuesto al punto anterior, es decir $A \subseteq B$



Tal y como se puede apreciar del diagrama de Venn anterior, al realizar la intersección se puede ver fácilmente que $A \cap B = A$.

c. $A - B = A$

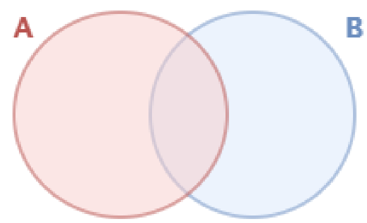
Esta situación se da cuando los conjuntos A y B son disyuntos, es decir $A \cap B = \emptyset$



Vemos que por definición $|A - B| = |A| - |A \cap B| = |A| - 0 = |A|$ lo cual nos permite deducir que $A - B = A$

d. $A \cap B = B \cap A$

La expresión anterior es una identidad básica de conjuntos (La intersección es conmutativa) por lo tanto A y B pueden ser dos conjuntos cualesquiera:



e. $A - B = B - A$

Para este caso tenemos que esta expresión puede ser válida cuando ambos conjuntos son iguales: $A = B$ ya que el conjunto resultante será vacío

3. (**15%**) Teniendo en cuenta que los conjuntos $A = \{1,3,4,5,7,8,9\}$, $B = \{0,4,5,9\}$ y $C = \{0,3,6,9\}$ están definidos dentro del conjunto universal compuesto por los números desde el 0 al 9. Resuelva las siguientes operaciones:
   a. **(1 %)** $A \cup B$
   b. **(2 %)** $A - B$
   c. **(2 %)** $B - A$
   d. **(2 %)** B'
   e. **(2 %)** $A \cup C'$
   f. **(2 %)** $C' - B'$
   g. **(2 %)** $C - C'$
   h. **(2 %)** $(C - A')'$

Solución:

Antes de empezar obtengamos el conjunto universal U:

$$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$A' = U - A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{1,3,4,5,7,8,9\} = \{0,2,6\}$$

$$B' = U - B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{0,4,5,9\} = \{1,2,3,6,7,8\}$$

$$C' = U - C = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{0,3,6,9\} = \{1,2,4,5,7,8\}$$

A continuación, tenemos la solución para cada operación:

a. $A \cup B = \{1,3,4,5,7,8,9\} \cup \{0,4,5,9\} = \{0,1,3,4,5,7,8,9\}$
b. $A - B = \{1,3,4,5,7,8,9\} - \{0,4,5,9\} = \{1,3,7,8\}$
c. $B - A = \{0,4,5,9\} - \{1,3,4,5,7,8,9\} = \{0\}$
d. $B' = U - B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{0,4,5,9\} = \{1,2,3,6,7,8\}$
e. $A \cup C' = A \cup C' = \{1,3,4,5,7,8,9\} \cup \{1,2,4,5,7,8\} = \{1,2,3,4,5,7,8,9\}$
f. $C' - B' = \{1,2,4,5,7,8\} - \{1,2,3,6,7,8\} = \{4,5\}$
g. $C - C' = \{0,3,6,9\} - \{1,2,4,5,7,8\} = \{0,3,6\}$
h. $(C - A')' = U - (C - A') = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - (\{0,3,6,9\} - \{0,2,6\}) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{3,9\}$
$(C - A')' = \{0,1,2,4,5,6,7,8\}$

Relaciones

4. **(15 %)** Sea $\mathbb{Z}_{13} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ sí se define la relación

$$R = \{(x, x^2 \text{mod} 13) | x \in \mathbb{Z}_{13}\}$$

Obtenga:
a. **(4 %)** Los pares de puntos que hacen parte de la relación.
b. **(4 %)** La matriz binaria asociada a la relación.
c. **(3 %)** Dibuje el gráfo dirigido que representa la relación.
d. **(4 %)** ¿Se puede decir que esta es una relación de orden parcial? Explique su respuesta.

Recuerde que $\mathbf{mod}$ es la operación modulo (%)

Solución:

A partir de la siguiente tabla vamos a obtener los pares de puntos de la relación:

x	x^2	$x^2\%13$	$(x, x^2\%13)$
0	0	0	(0,0)
1	1	1	(1,1)
2	4	4	(2,4)
3	9	9	(3,9)
4	16	3	(4,3)
5	25	12	(5,12)
6	36	10	(6,10)
7	49	10	(7,10)
8	64	12	(8,12)
9	81	3	(9,3)
10	100	9	(10,9)
11	121	4	(11,4)
12	144	1	(12,1)

A partir de esta tabla podemos proceder a realizar lo que se pide:

a. Los pares de puntos que hacen parte de la relación.

$$R = \{(0,0), (1,1), (2,4), (3,9), (4,3), (5,12), (6,10), (7,10), (8,12), (9,3), (10,9), (11,4), (12,1)\}$$

b. La matriz binaria asociada a la relación.

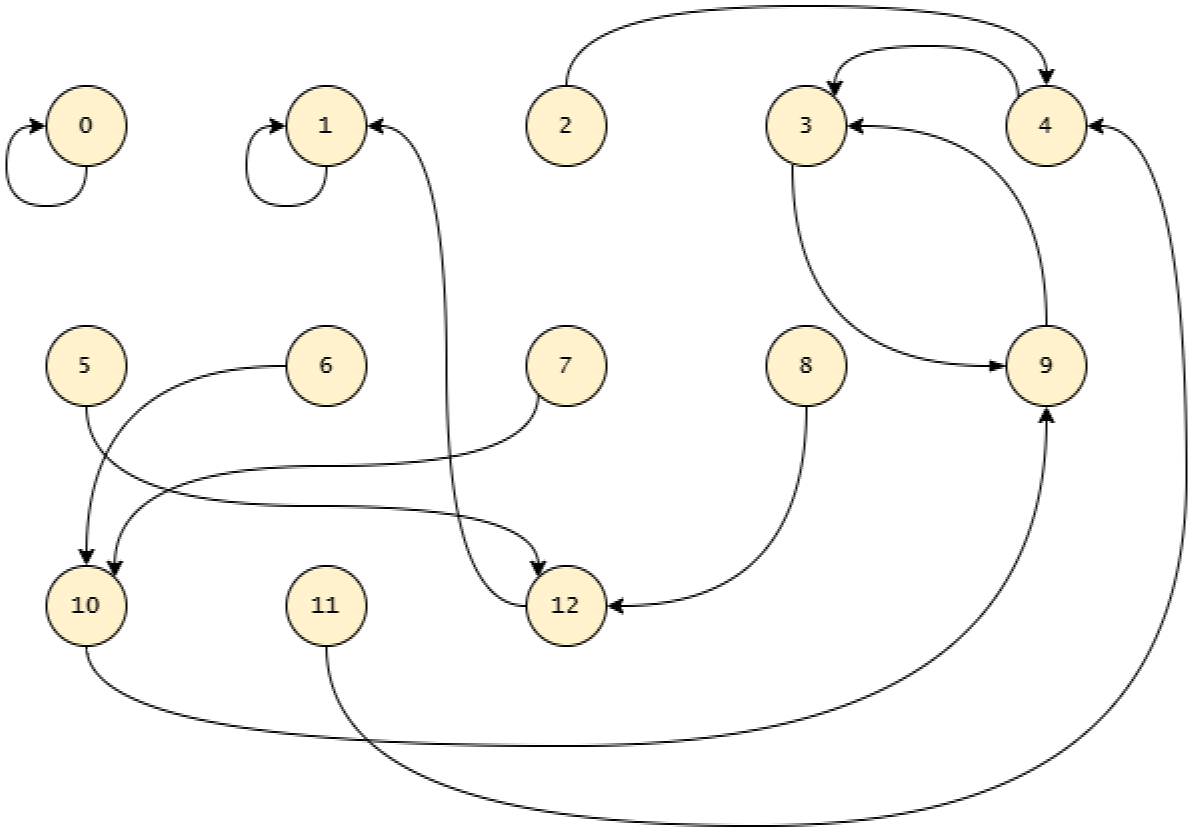
Antes de realizar la matriz binaria vamos

x / y	0	1	3	4	9	10	12
0	x						
1		x					
2				x			
3					x		
4			x				
5							x
6						x	
7						x	
8							x
9			x				
10					x		
11				x			
12	x						

Ahora sí, representemos la matriz binaria:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c. Dibuje el gráfo dirigido que representa la relación.

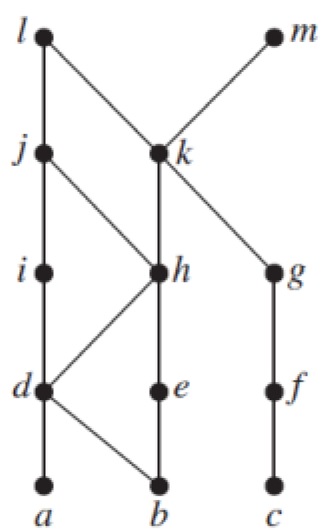


d. ¿Se puede decir que esta es una relación de orden parcial? Explique su respuesta.

Para que la relación R sea de orden parcial debe cumplir 3 propiedades:

- **Reflexiva -** $\forall \boldsymbol{x}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{R})$: **No**, pues no hay loops en todos los vértices.
- **Antisimétrica -** $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R} \wedge \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \rightarrow (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}) \notin \boldsymbol{R})$: **No**, pues hay relaciones en doble sentido.
- **Transitiva -** $\forall \boldsymbol{x} \forall \boldsymbol{y} \forall \boldsymbol{z}((\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{R} \wedge (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{R} \rightarrow (\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{R})$: **No**, hay casos en los que no se cumple la transitividad, por ejemplo $(2,4) \in R$ y $(4,3) \in R$ pero $(2,3) \notin R$ por lo tanto la condición para transitividad no se cumple.

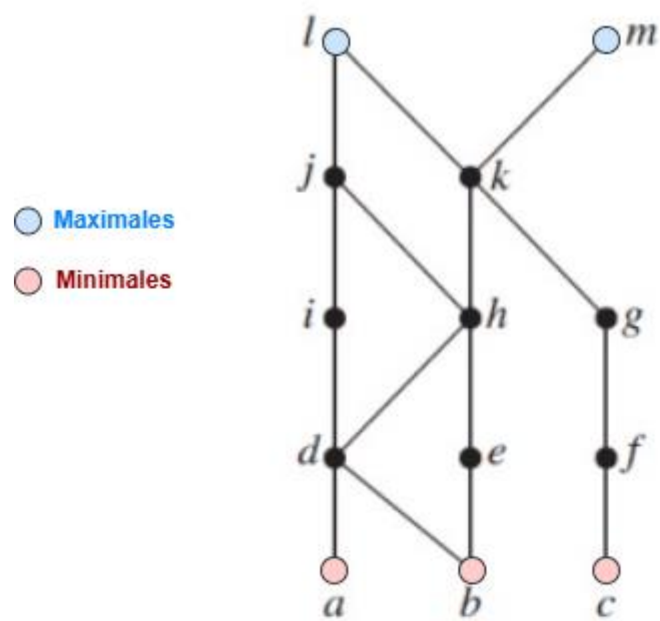
5. **(25 %)** De acuerdo al diagrama de Hasse mostrado a continuación:



Responda las siguientes preguntas:

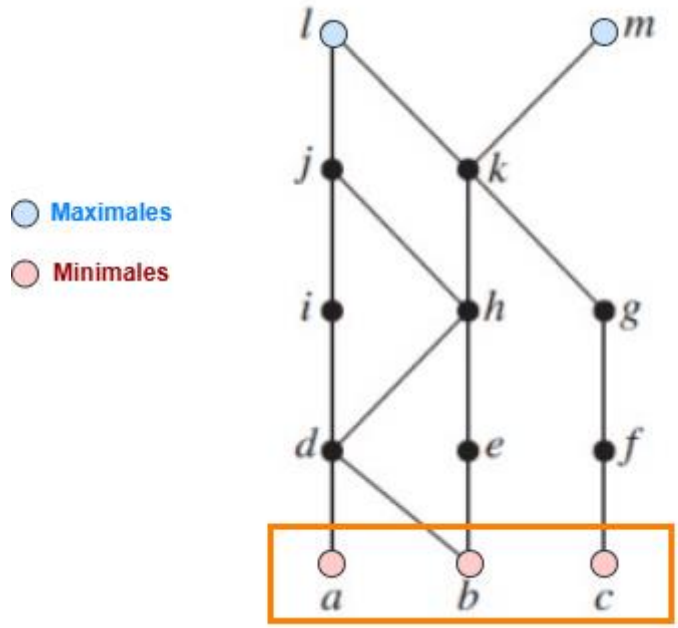
a. **(3 %)** Hallar los maximales.
b. **(3 %)** Hallar los minimales.
c. **(3 %)** ¿Existe un elemento mayor?
d. **(3 %)** ¿Existe un elemento menor?
e. **(3 %)** Hallar todas las cotas superiores de $\{a, b, c\}$
f. **(3 %)** Hallar la menor de las cotas superiores de $\{a, b, c\}$, si existe.
g. **(3 %)** Hallar todas las cotas inferiores de $\{f, g, h\}$.
h. **(4 %)** Hallar la mayor de las cotas inferiores de $\{f, g, h\}$, sí existe.

Solución:
A partir de la siguiente figura procedemos a solucionar los numerales **a**, **b**, **c** y **d**.



a. Hallar los maximales: $\{\boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}\}$
b. Hallar los minimales: $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$
c. ¿Existe un elemento mayor?: **No**
d. ¿Existe un elemento menor? **No**

La siguiente figura se emplea para la solución de los numerales los numerales **e** y **f**.



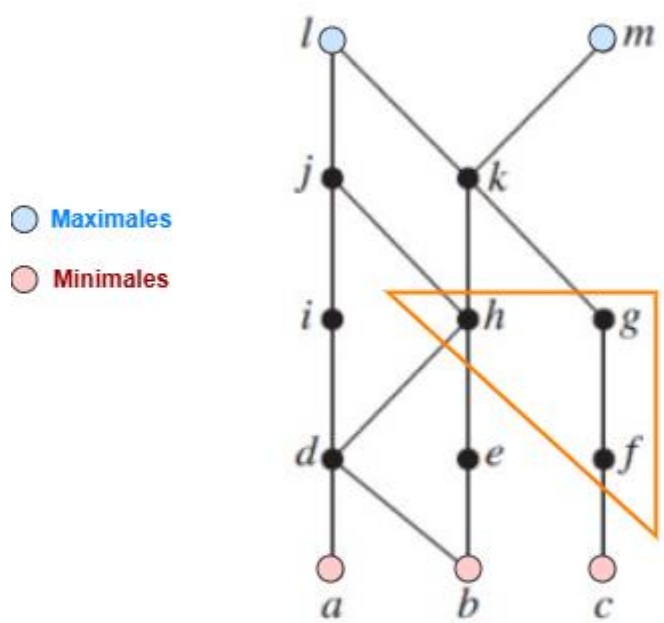
e. Hallar todas las cotas superiores de $\{a, b, c\}$:

$$\{\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}\}$$

f. Hallar la menor de las cotas superiores de $\{a, b, c\}$, si existe:

$$\{\boldsymbol{k}\}$$

Finalmente, con la siguiente figura se resuelven los numerales restantes (**g** y **h**)



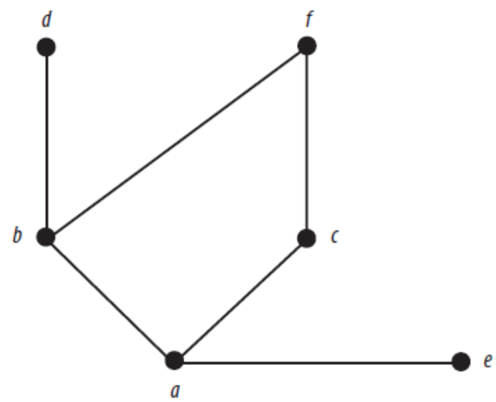
g. Hallar todas las cotas inferiores de $\{f, g, h\}$.

$$\emptyset = \{\}$$

h. Hallar la mayor de las cotas inferiores de $\{f, g, h\}$, sí existe.

No existe

6. **(20 %)** Dado el siguiente diagrama de Hasse:

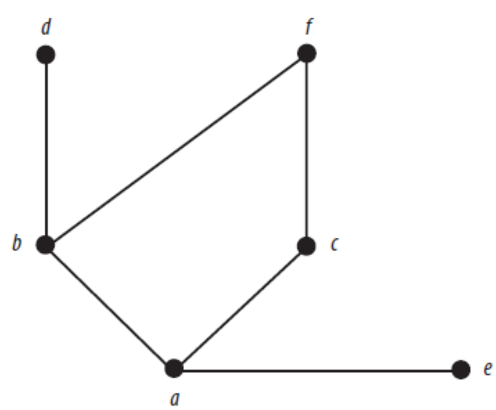


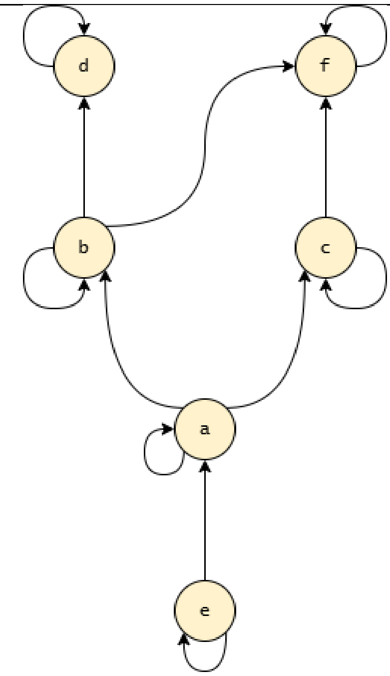
a. **(6 %)** Obtenga el dígrafo correspondiente a este diagrama de Hasse.
b. **(8 %)** Liste todos los pares de puntos que hacen parte de la relación de orden.
c. **(6 %)** Obtenga la matriz binaria de la relación.

Solución:

a. **(7 %)** Obtenga el dígrafo correspondiente a este diagrama de Hasse.

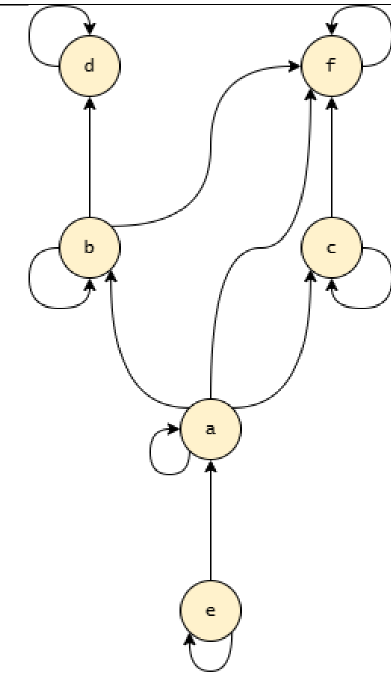
Aunque no se dijo en clase, ya que un diagrama de Hasse es una versión resumida de un grafo que representa una relación de orden (parcial o total), distintos grafos pueden tener un mismo diagrama de Hasse de modo que puede haber varias respuestas. La siguiente tabla muestra **dos posibles dígrafos** para el ejercicio del examen:

<table>
<tr><th colspan="2">Diagrama de Hasse</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><th>Grafo G_1</th><th>Grafo G_2</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>



$$R_1 = \left\{\begin{matrix}(e,e),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(f,f),\\(e,a),(a,b),(a,c),(b,d),(b,f),(c,f)\end{matrix}\right\}$$

$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$R_2 = \left\{\begin{matrix}(e,e),(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(f,f),\\(e,a),(a,b),(a,c),(a,f),(b,d),(b,f),\\(c,f)\end{matrix}\right\}$$

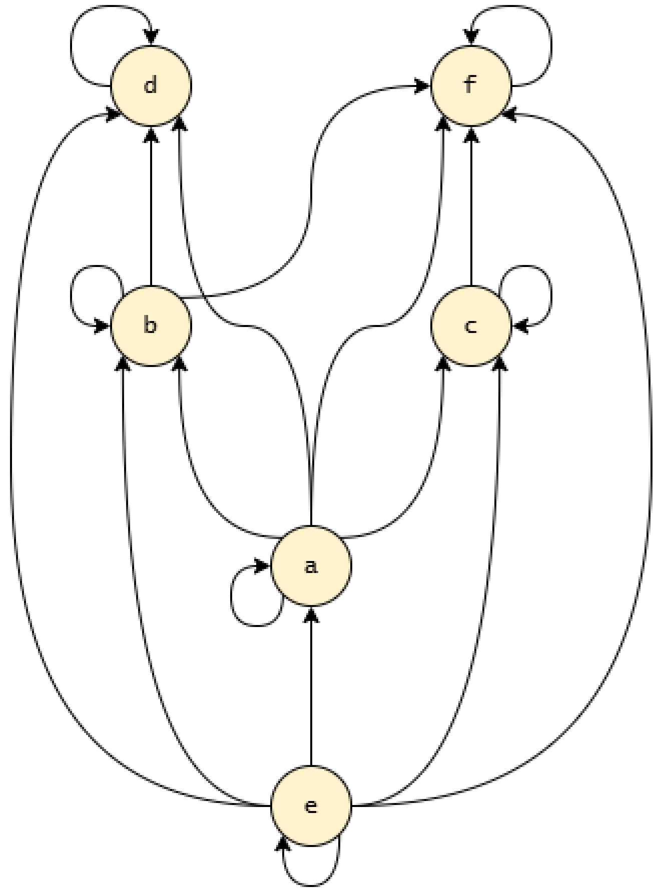
$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. **(7 %)** Liste todos los pares de puntos que hacen parte de la relación de orden.

Acá cambia un poco la cosa por que listar todos los puntos implica descubrir completamente toda la información resumida por el diagrama de Hasse teniendo en cuenta que al representar una relación de orden parcial se deben cumplir las propiedades de **reflexividad**, **simetría** y **antitransitividad**:

$$R = \left\{\begin{matrix}(a,a),(a,b),(a,d),(a,f),(a,c),\\(b,b),(b,d),(b,f),\\(c,c),(c,f),\\(d,d),\\(e,e),(e,a),(e,b),(e,d),(e,c),(e,f),\\(f,f)\end{matrix}\right\}$$

De este modo del grafo estricto asociado a la relación que contiene todos los puntos es el siguiente:



c. **(6 %)** Obtenga la matriz binaria de la relación.

A continuación, se muestra la matriz asociada a la relación en sentido estricto:

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$