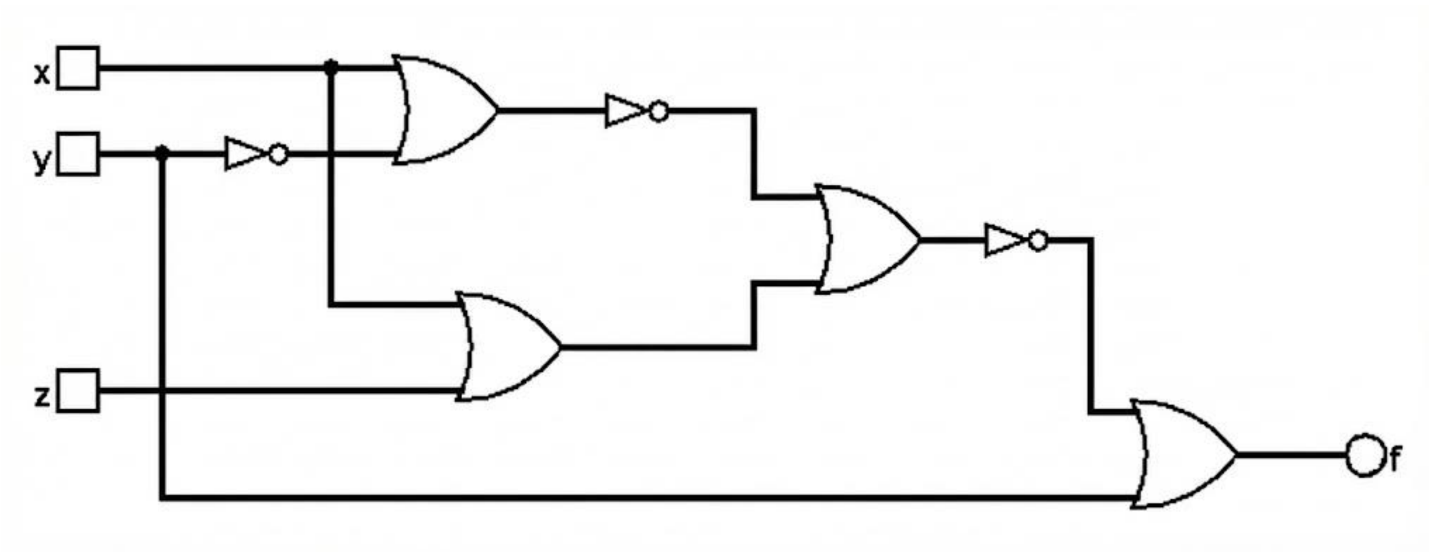
MATEMATICAS DISCRETAS 1
PARCIAL 4 – ALGEBRA BOOLEANA Y SISTEMAS NUMERICOS

Nombre: ______________________SOLUCION_____________________ **Identificación**: ________SOLUCION________

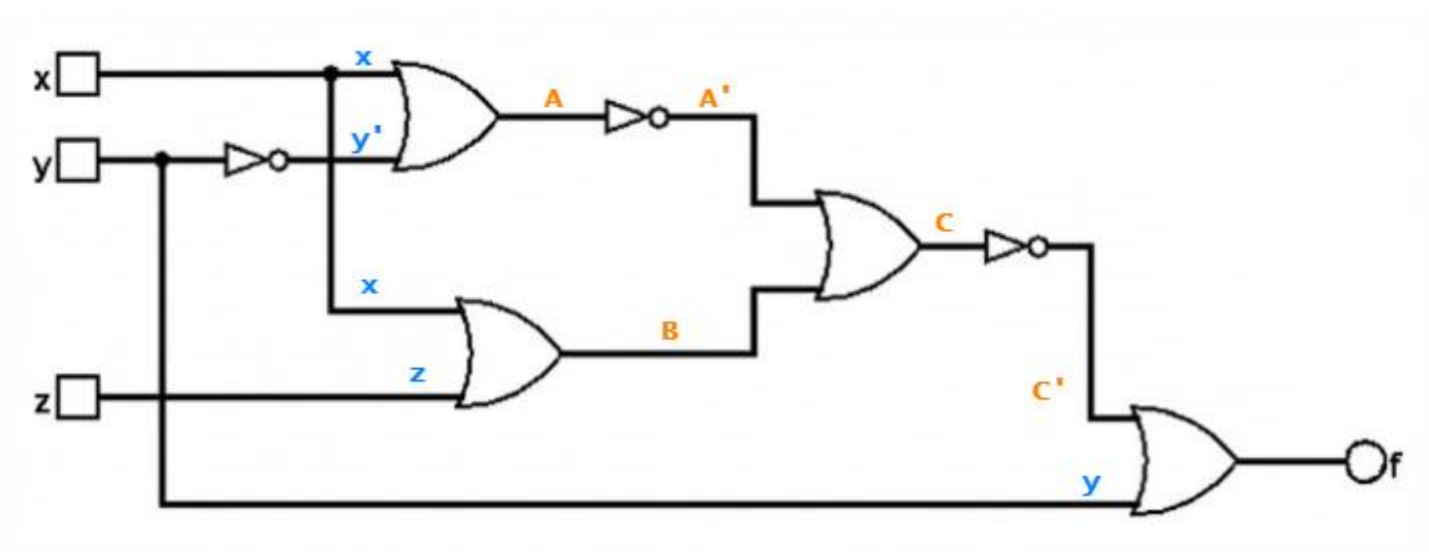
Circuitos digitales

1. **(25 %)** Para el circuito mostrado en la siguiente figura:
   a. **(5 %)** Deduzca la expresión booleana que este implementa.
   b. **(5 %)** Empleando las identidades de Algebra Booleana simplifique la función booleana asociada al circuito.
   c. **(5 %)** Dibuje el circuito simplificado resultante.
   d. **(5 %)** Obtenga la tabla de verdad asociada al circuito simplificado.
   e. **(5 %)** A partir de la tabla de verdad obtenga las formas POS y SOP asociadas el circuito.



Solución:

a. **Función Booleana asociada al circuito**: Para este caso nos piden $f(x, y, z)$ donde x, y y z son las entradas f es la salida. Para empezar, vamos a rotular cada señal del circuito tal y como se muestra en la siguiente figura:



De la figura anterior tenemos que:

$$f = y + C' \qquad (1)$$

$$C = A' + B \qquad (2)$$

$$B = x + z \qquad (3)$$

$$A = x + y' \qquad (4)$$

Reemplazando (3) y (4) en (2) tenemos:

$$C = (x + y')' + x + z \qquad (5)$$

Reemplazando (5) en (1) tenemos finalmente que:

$$f = y + ((x + y')' + x + z)'$$

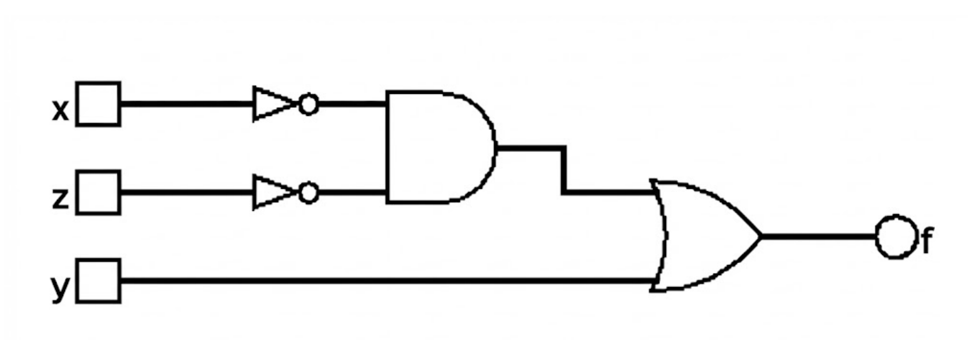
b. **Función simplificada**: En la siguiente tabla se describen los pasos realizados para llevar a cabo la simplificación:

	Pasos	**Justificación**
1	$y + ((x + y)' + x + z)'$	Forma original sin simplificar
2	$y + (x + y')'' \cdot x' \cdot z'$	Ley de Morgan para el OR $(+)$ en **1**
3	$y + (x + y') \cdot x' \cdot z'$	Ley de la doble negación en **2**
4	$y + x \cdot x' \cdot z' + y' \cdot x' \cdot z'$	Ley distributiva para el AND $(\cdot)$ en **3**
5	$y + (x \cdot x') \cdot z' + y' \cdot x' \cdot z'$	Ley asociativa para el AND $(\cdot)$ en **4**
6	$y + 0 \cdot z' + y' \cdot x' \cdot z'$	Ley del complemento para el AND $(\cdot)$ en **5**
7	$y + y' \cdot x' \cdot z'$	Ley de dominación para el AND $(\cdot)$ en **6**
8	$y + y' \cdot (x' \cdot z')$	Ley asociativa para el AND $(\cdot)$ en **7**
9	$(y + y') \cdot (y + x' \cdot z')$	Ley distributiva para el OR $(+)$ en **8**
10	$1 \cdot (y + x' \cdot z')$	Ley del complemento para el OR $(+)$ en **9**
11	$y + x' \cdot z'$	Ley de identidad para el AND $(\cdot)$ en **10**

De este modo, la función simplificada equivalente es:

$$f = y + x' \cdot z'$$

c. **Circuito simplificado**: A continuación, se muestra el circuito simplificado:



d. **Tabla de verdad asociada al circuito simplificado**: A continuación, muestra la tabla de verdad asociada al circuito simplificado:

- **Entradas (variables booleanas)**: x, y y z
- **Numero de filas**: $n = 3 \rightarrow f = 2^3 = 8$

x	y	z	x'	z'	$x' \cdot z'$	$y + x' \cdot z'$
0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1

e. Formas POS y SOP: A partir de la tabla obtengamos las formas POS y SOP:

i	x	y	z	f	m_i	M_i
0	0	0	0	1	$x'y'z'$	
1	0	0	1	0		$x + y + z'$
2	0	1	0	1	$x'yz'$	
3	0	1	1	1	$x'yz$	
4	1	0	0	0		$x' + y + z$
5	1	0	1	0		$x' + y + z'$
6	1	1	0	1	xyz'	
7	1	1	1	1	xyz	

Según lo anterior las formas POS y SOP quedan como se muestra a continuación:

- **Forma POS:**

$$f = \sum m(0,2,3,6,7) = x'y'z' + z'yz' + x'yz + xyz' + xyz$$

- **Forma SOP:**

$$f = \prod M(1,4,5) = (x + y + z')(x' + y + z)(x' + y + z')$$

2. **(25 %)** Se desea monitorear un recipiente químico con sensores de presión y temperatura. Cada sensor entrega una salida **ALTA** al superar su límite. Diseñe un sistema que active una alarma en **BAJO** si cualquiera de las dos variables excede el máximo. Para ello siga los siguientes pasos:
   - **a.** **(5 %)** Obtenga la tabla de verdad asociada al circuito.
   - **b.** **(5 %)** A partir de la tabla de verdad obtenga las formas POS y SOP asociadas el circuito.
   - **c.** **(5 %)** A partir de la SOP dibuje el circuito digital.
   - **d.** **(5 %)** A partir de la SOP obtenga la expresión simplificada (si es posible) empleando algebra booleana.
   - **e.** **(5 %)** Dibuje el circuito simplificado (si existe).

Solución:

Antes de iniciar la solución del problema definamos las entradas u salidas del sistema:

Entradas:

- **P**: Sensor de presión.
- **T**: Sensor de temperatura.

Salida:

- **A**: Alarma

a. Tabla de verdad asociada al circuito: De acuerdo a la información tenemos que:

- **Entradas (variables booleanas)**: P y T
- **Numero de filas**: $n = 2 \to f = 2^2 = 4$

Según la descripción del sistema, la tabla de verdad asociada sería la siguiente:

P	T	A
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

b. Formas POS y SOP: A partir de la tabla obtengamos las formas POS y SOP:

i	P	T	A	m_i	M_i
0	0	0	1	$P'T'$	
1	0	1	0		$P + T'$
2	1	0	0		$P' + T$
3	1	1	0		$P' + T'$

Según lo anterior las formas POS y SOP quedan como se muestra a continuación:

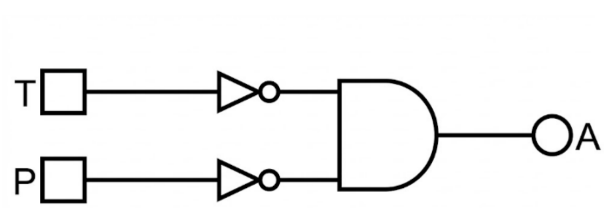
- **Forma POS:**

$$f = \sum m(0) = P'T'$$

- **Forma SOP:**

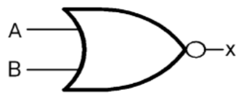
$$f = \prod M(1,2,4) = (P + T')(P' + T)(P' + T')$$

c. Circuito digital: A continuación, se muestra el circuito digital asociado al sistema:

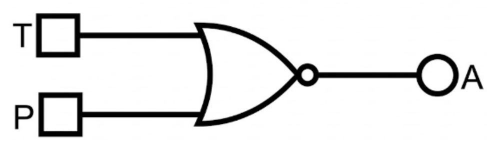


d. Expresión simplificada: La función lógica ya se encuentra simplificada.

e. **Circuito lógico simplificado**: Como la función lógica ya se encuentra simplificada, el circuito lógico es el mismo, sin embargo, si comparamos la tabla de verdad resultante podemos ver que esta es similar a la de la compuerta NOR:

<table>
<tr><th>Compuerta</th><th>Símbolo</th><th>Expresión lógica</th><th>Tabla de verdad</th></tr>
<tr><td>NOR</td><td>
</td><td>$x = (A + B)'$</td><td>
<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>x</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

De modo que un circuito lógico equivalente y con menos compuertas (mas económico) que hace lo mismo es el siguiente:



Sistemas numéricos

Nota importante: Los procedimientos para obtener los resultados de los ejercicios aquí planteados deben ser claramente explicados empleando los métodos vistos en clase. Resultado obtenido sin explicación se tomara como invalido.

3. (**10%**) Dado el numero 83_7 obtenga su equivalente en base 3

Solución:

El numero 83_7 es un numero invalido ya que 8 no es un digito valido para la base 7.

4. (**10%**) Convertir a decimal el numero $FB17_{16}$

Solución:

Para convertir $FB17_{16}$ en base 10 empleamos la expansión en potencias:

$$\begin{aligned} FB17_{16} &= F \cdot 16^3 + B \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 7 \cdot 16^0 \\ &= 15 \cdot 4096 + 11 \cdot 256 + 1 \cdot 16 + 7 \cdot 1 \\ &= 61440 + 2816 + 16 + 7 \\ &= 64279 \end{aligned}$$

De modo que:

$$FB17_{16} = 64279$$

5. (**10%**) Convertir a octal y hexadecimal el número decimal 435.

Solución:

Empleando divisiones sucesivas procedemos a convertir el 435 a base octal:

$$
\begin{array}{r|lr|lr|l}
435 & 8 & & & & \\
\cline{2-2}
35 & 54 & & 8 & & \\
\cline{4-4}
3 & 6 & & 6 & & 8 \\
\cline{6-6}
 & & & 6 & & 0
\end{array}
$$

De este modo:

$$435_{10} = 663_8$$

Para la conversión de 663_8 a base 16 empleamos la relación que existen entre ambas bases haciendo primero la conversión de 663_8 a base 2 y de esta base a la base 16:

$$663_8 = 110110011 = 110110011 = 1B3_{16}$$

De este modo tenemos que:

$$435_{10} = 663_8 = 1B3_{16}$$

6. (**10%**) Convertir a hexadecimal, octal y decimal el siguiente número binario 100110000010_2

Solución:

Empecemos realizando la conversión de binario a octal:

$$100110000010_2 = 100110000010_2 = 4602_8$$

Ahora convirtamos de binario a hexadecimal:

$$100110000010_2 = 100110000010_2 = 982_{16}$$

Finalmente convirtamos de hexadecimal a decimal:

$$
\begin{aligned}
982_{16} &= 9 \cdot 16^2 + 8 \cdot 16^1 + 2 \cdot 16^0 \\
&= 9 \cdot 256 + 8 \cdot 16 + 2 \cdot 1 \\
&= 2304 + 128 + 2 \\
&= 2434
\end{aligned}
$$

De este modo el resultado es:

$$100110000010_2 = 4602_8 = 982_{16} = 2434_{10}$$

7. (**10%**) Convertir a binario el siguiente numero EB_{16}

Solución:

A continuación, se convierte a binario el número EB_{16}:

$$EB_{16} = EB_{16} = 11101011_2$$