Curso
Matemáticas Discretas I

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Clase 10 – Relaciones

Agenda

- Introducción
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- Propiedades de las relaciones
- Representación de las relaciones

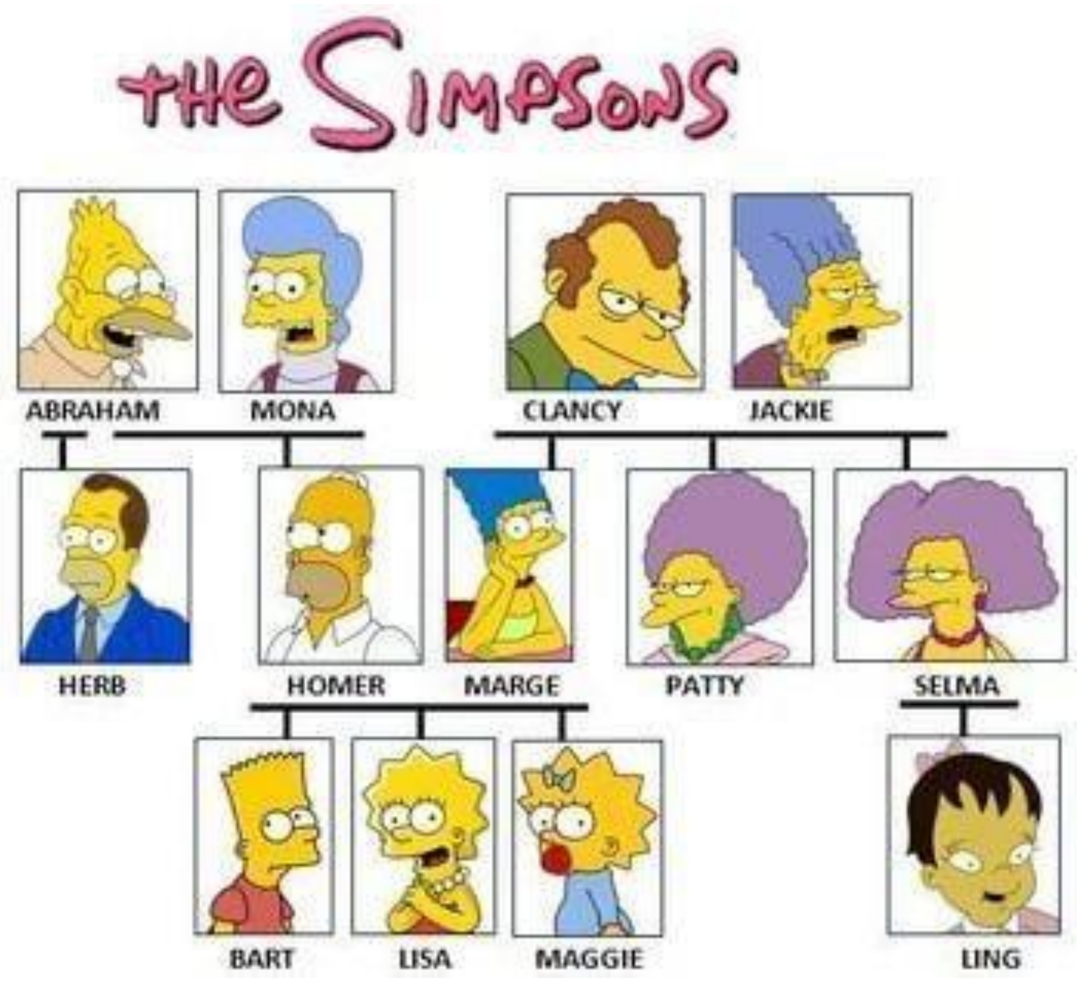
Agenda

- **Introducción**
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- Propiedades de las relaciones
- Representación de las relaciones

Introducción

Contextualización

Las relaciones estructuran nuestro mundo.

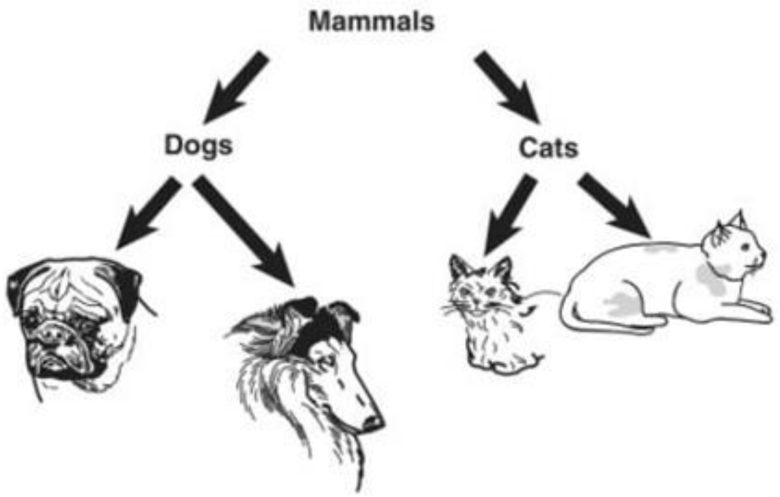


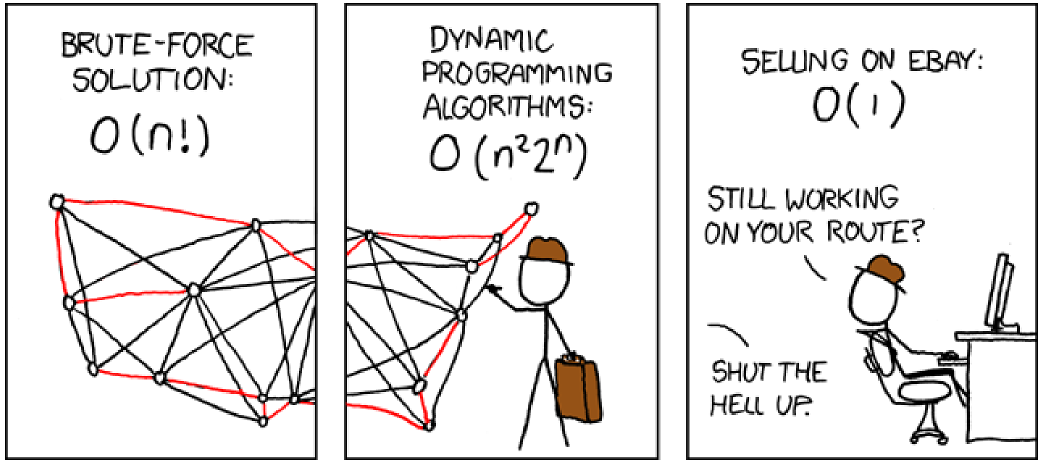
Personaje	Comida Favorita
Homero Simpson	Rosquilla
Marge Simpson	Chuletas de cerdo
Bart Simpson	Krusty Burger
Lisa Simpson	Plato vegetariano
Maggie Simpson	Chupete

Introducción

Contextualización

Las relaciones estructuran nuestro mundo.





https://www.explainxkcd.com/

Estudiante	Curso
Ana	Cálculo
Ana	Lógica
Juan	Lógica
Juan	Programación
Carla	Cálculo
Carla	Programación
Pedro	Álgebra
Sofía	Lógica
Sofía	Álgebra

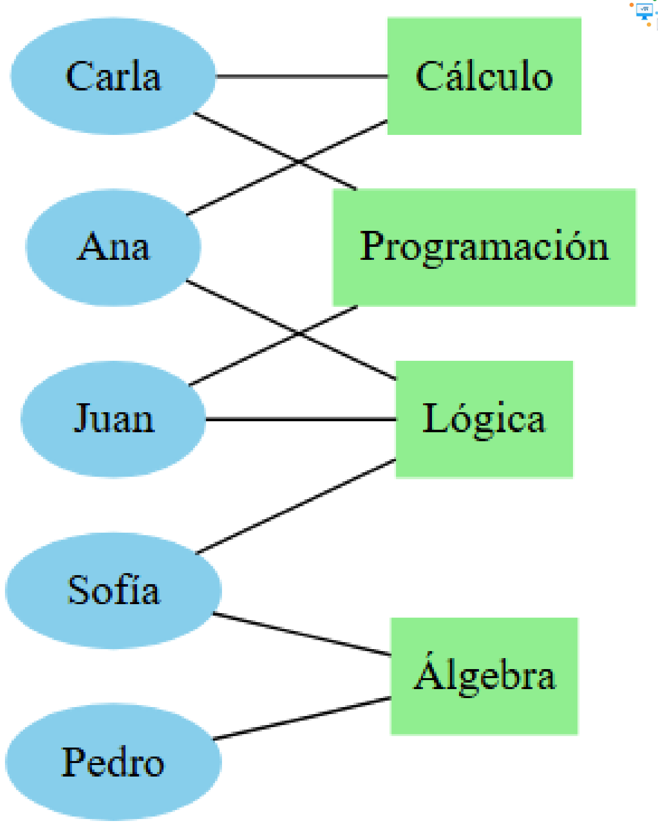
Introducción

Contextualización

¿Como puedo representar las relaciones?

Estudiante	Curso
Ana	Cálculo
Ana	Lógica
Juan	Lógica
Juan	Programación
Carla	Cálculo
Carla	Programación
Pedro	Álgebra
Sofía	Lógica
Sofía	Álgebra

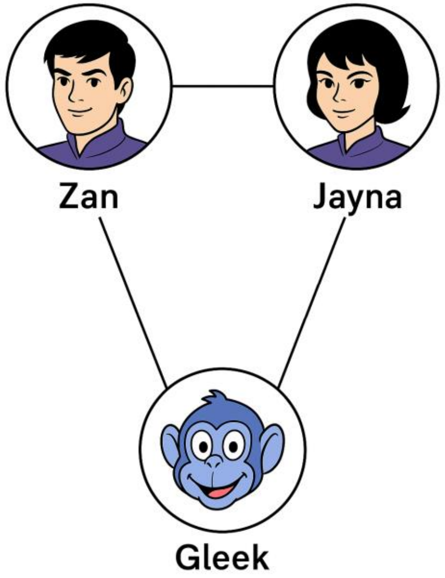
```
registro_materias = {
     ("Ana", "Calculo"),
     ("Ana", "Logica"),
     ("Juan", "Logica"),
     ("Juan", "Programacion"),
     ("Carla", "Calculo"),
     ("Carla", "Programación"),
     ("Pedro", "Algebra"),
     ("Sofia", "Logica"),
     ("Sofia", "Algebra")
   }
```

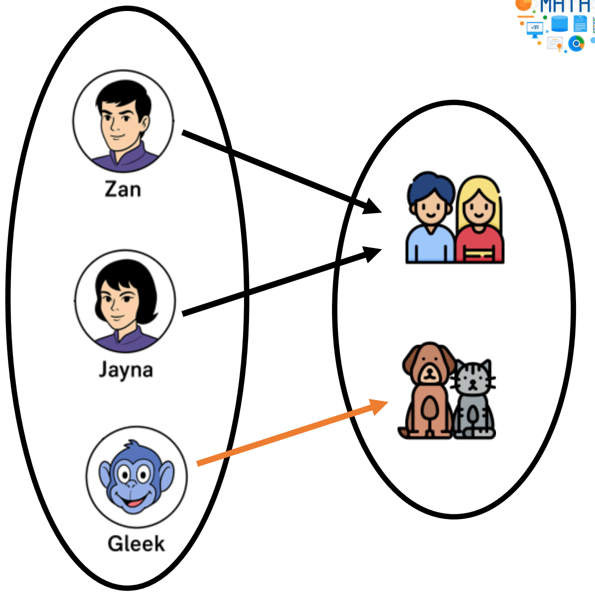


Introducción

Contextualización

¿Como puedo representar las relaciones?






```
gemelo("Zan","Jaina").
gemelo("Jaina","Zan").
mascota("Gleek","Zan").
mascota("Gleek","Jaina").
```

```
familiaGemelos = {
     "hermano": ["Zan", “Jaina"],
     "mascota": [“Gleek"]
   }
```

```
familiaGemelos = {
     ("Zan", "hermano"),
     ("Jaina", "hermano"),
     ("Gleek", "mascota"),
   }
```

Introducción

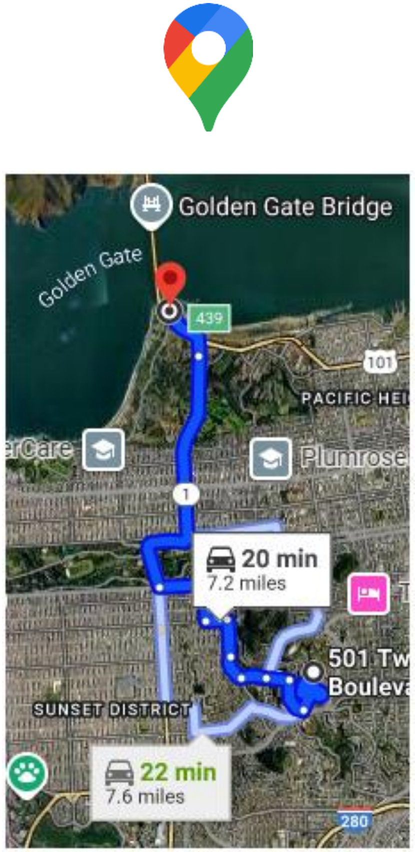
UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

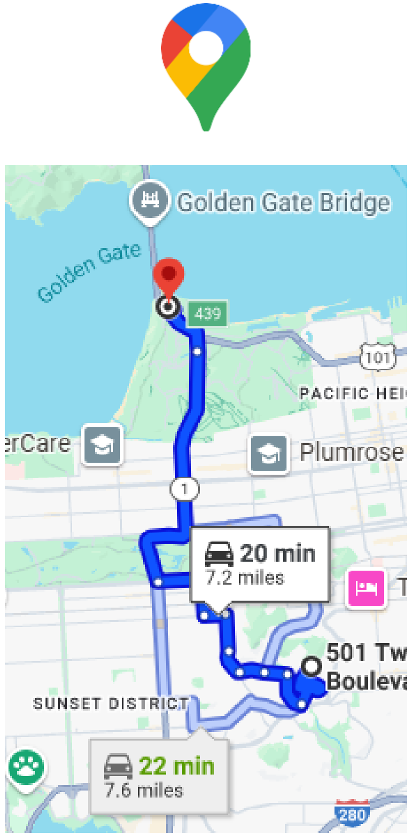
Contextualización

Problema típico: ¿Como puedo representar las relaciones?

Ejemplo tomado de Grokking Algorithms (link): Imagine que está en San Francisco y quieres ir de **Twin Peaks** al puente **Golden Gate**. ¿Si Quiere llegar en autobús, con el mínimo número de transbordos cuales son las opciones?

Origen: Twin Peaks → **Destino**: Golden Gate





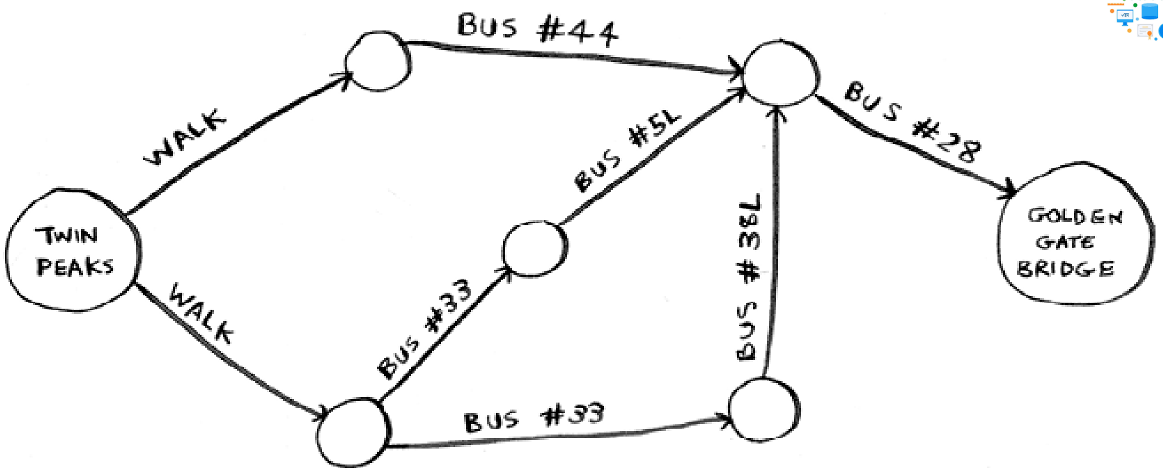
Introducción

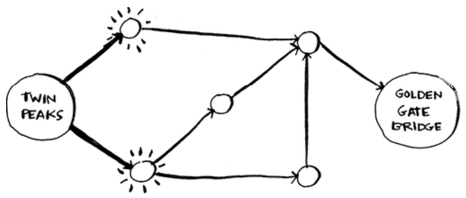
UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

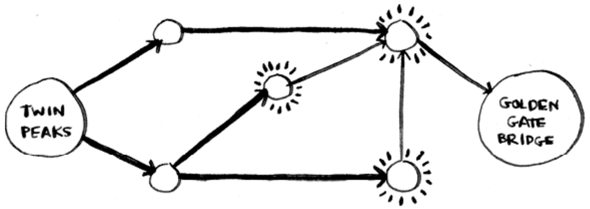
Contextualización

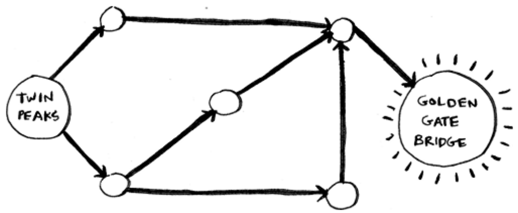
Problema típico: ¿Como puedo representar las relaciones?

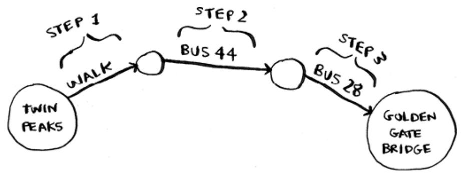
Ejemplo tomado de Grokking Algorithms (link): Imagine que está en San Francisco y quieres ir de **Twin Peaks** al puente **Golden Gate**. ¿Si Quiere llegar en autobús, con el mínimo número de transbordos cuales son las opciones?











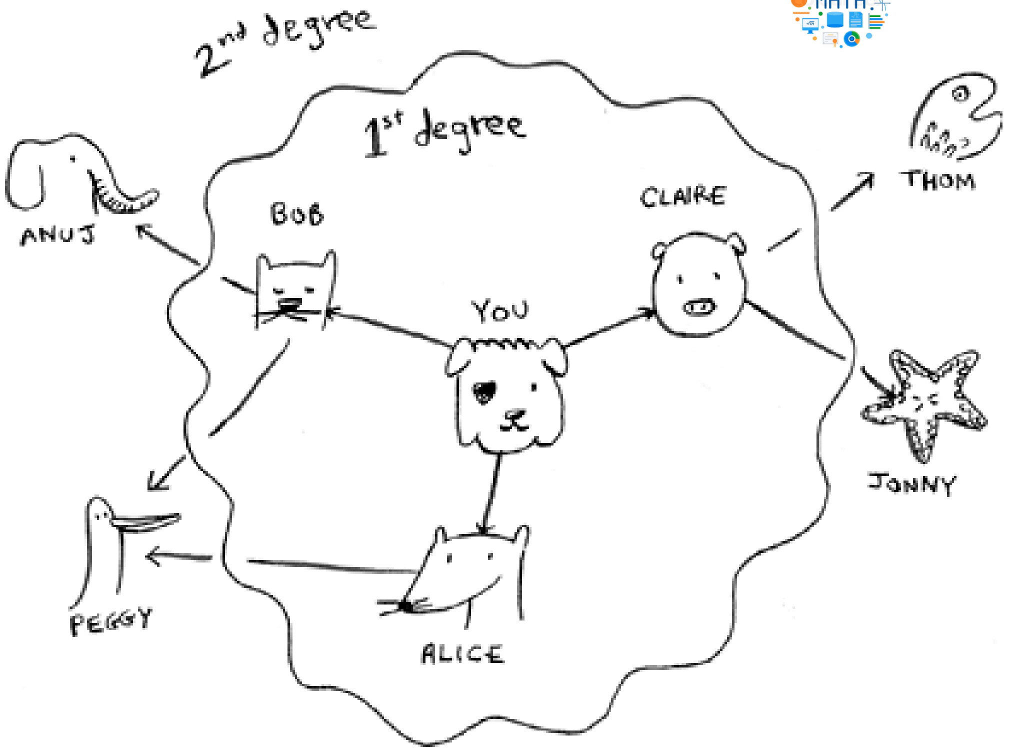
Introducción

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Contextualización

Problema típico: ¿Como puedo representar las relaciones?

Redes sociales (Ver Grokking Algorithms (link))




```python
graph = {}
graph["you"] = ["alice", "bob", "claire"]
graph["bob"] = ["anuj", "peggy"]
graph["alice"] = ["peggy"]
graph["claire"] = ["thom", "jonny"]
graph["anuj"] = []
graph["peggy"] = []
graph["thom"] = []
graph["jonny"] = []
```

https://github.com/egonSchiele/grokking_algorithms/blob/master/06_breadth-first_search/python/01_breadth-first_search.py

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- **Conceptos básicos**
- Relaciones entre conjuntos
- Propiedades de las relaciones
- Representación de las relaciones

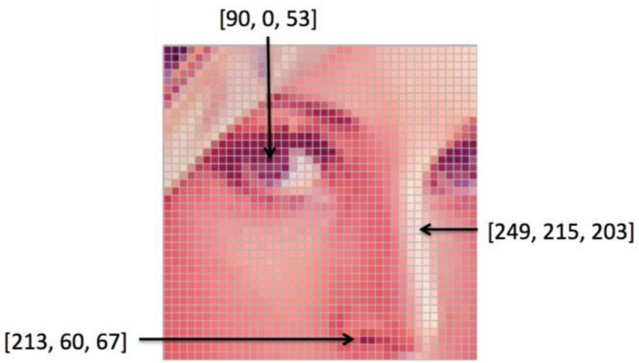
Conceptos básicos

N-tupla ordenada

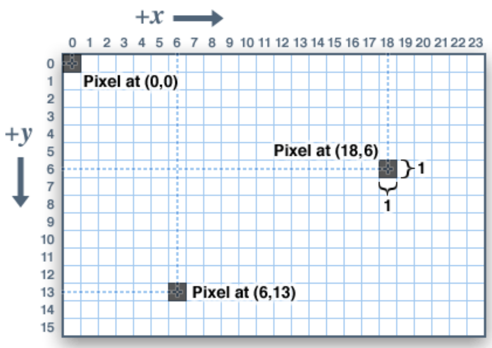
Una n-tupla, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, es una secuencia ordenada y finita de n elementos donde:

- El orden importa
- Se permiten repeticiones
- Igualdad

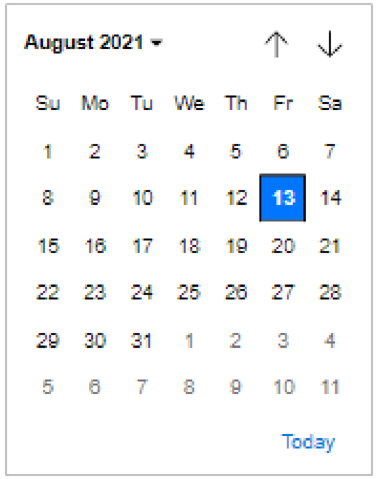
$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2 \wedge \cdots \wedge a_n = b_n$$



(R, G, B)



(i, j)



$(DD, MM, YYYY)$

(G)

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos básicos

Producto cartesiano: Fabrica para crear tuplas

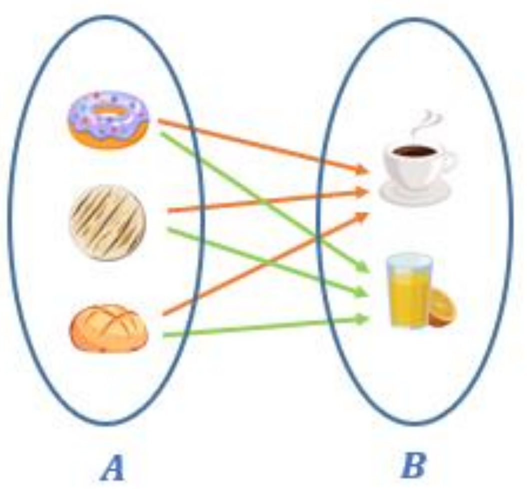
Conjunto de todas las posibles parejas (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$ lo cual se denota formalmente (de diferentes maneras como) como:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

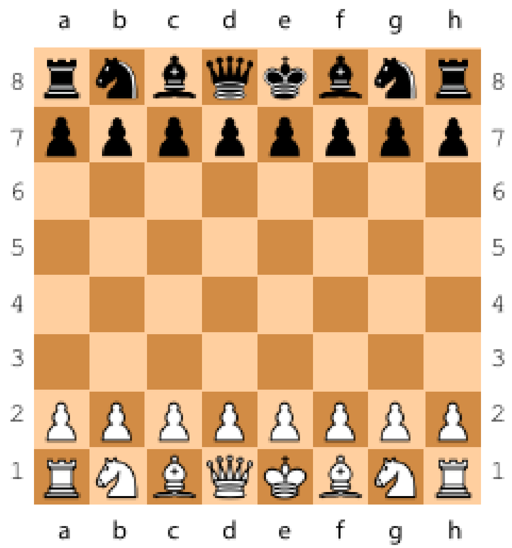
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i \text{ para } i = 1,2, \ldots, n\}$$

$$|A_1 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \times \cdots \times |A_n|$$



$$Combos = \left\{ \begin{matrix} (rosquilla, cafe), (rosquilla, jugo), \\ (arepa, cafe), (arepa, jugo), \\ (pan, cafe), (pan, jugo) \end{matrix} \right\}$$

$$|Combos| = |A||B| = (3)(2) = 6$$



$$Posisiones = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = \{(a, 1), \ldots, (h, 8)\}$$

$$|Posisiones| = |\{a, b, c, d, e, f, g, h\}| \times |\{1,2,3,4,5,6,7,8\}| = (8)(8) = 64$$

Conceptos básicos

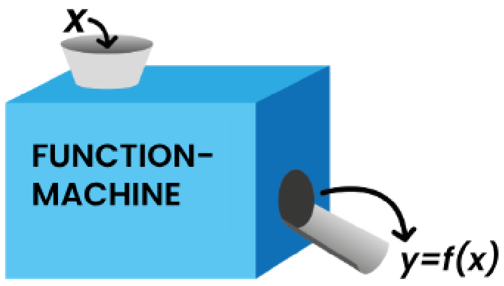
Funciones

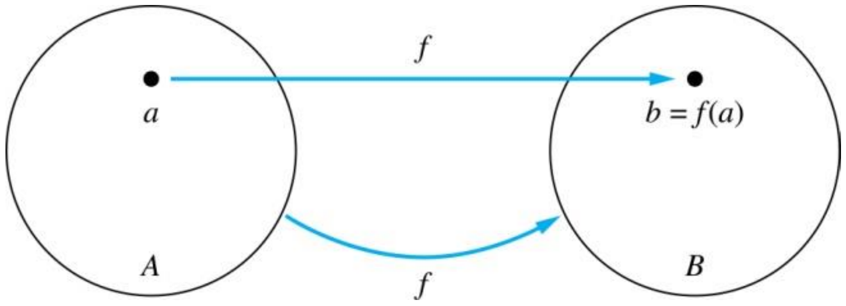
Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A a B es una **regla** que asigna a **cada** elemento de A **exactamente un** elemento de B. Esto se escribe como:

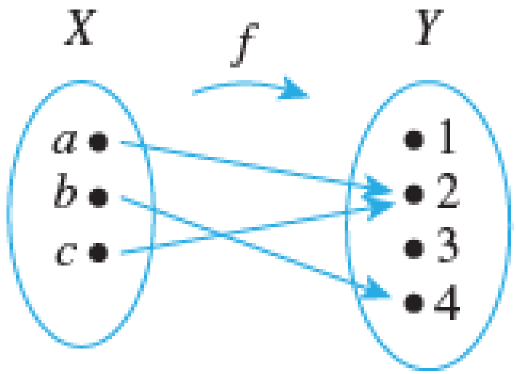
$$f: A \to B$$

Una función $f: A \to B$ también puede definirse como un subconjunto de $A \times B$ (una relación). Este subconjunto está restringido a una relación donde ningún par de elementos de la relación tiene el mismo primer elemento.

$$f = \{(a, b) \in A \times B | \text{a cada } a \in A \text{ le corresponde un unico } b \in B\}$$







Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- Conceptos básicos
- **Relaciones entre conjuntos**
- Propiedades de las relaciones
- Representación de las relaciones

Relaciones

Definición Relación

Una relación R de A en B, representada también como $R(x, y)$, es un conjunto de pares ordenados (x, y), donde $x \in A$ y $y \in B$, que satisfacen una propiedad determinada $P(x, y)$. Formalmente, se define como:

$$R = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge P(x, y)\}$$

Como no todos los elementos de A tienen que estar relacionados con los elementos de B mediante la condición P; el conjunto R es **un subconjunto** $A \times B$, es decir:

$$R \subseteq A \times B$$

A este tipo de relaciones se les denomina **relaciones binarias**.

De manera informal, una relación (binaria) describe una **relación de pares** que se cumple para ciertos pares de elementos de dos conjuntos A y B.

Relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Numero de relaciones existentes

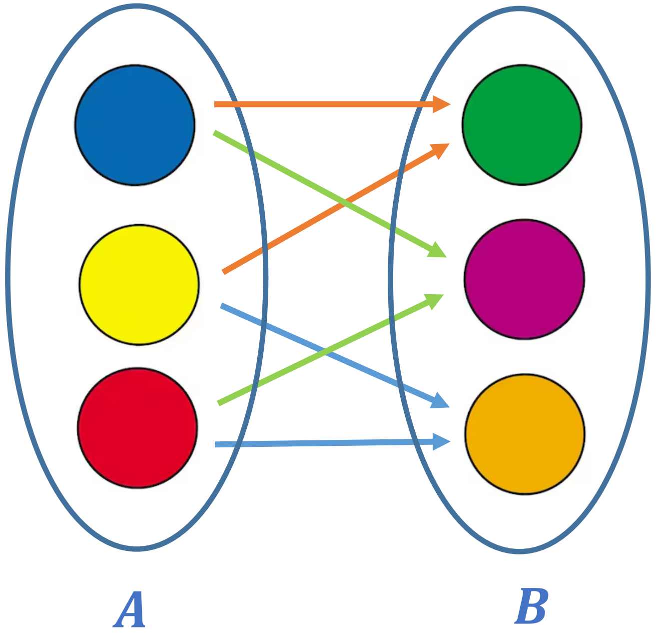
El número total de relaciones que se pueden definir de un conjunto de un conjunto A a un conjunto B es simplemente el número de subconjuntos de $A \times B$ es decir $|\mathcal{P}(A \times B)|$. Para el caso, sea $|A| = m$ y $|B| = n$ entonces:

$$|A \times B| = |\mathcal{P}(A \times B)| = 2^{|A \times B|} = 2^{|A| \cdot |B|} = 2^{m \cdot n}$$

Relaciones

Ejemplo 1

A continuación, se presenta una relación particular que expresa la relación "es un componente de" entre los colores primarios y secundarios:



Solución: Sean los conjuntos A y B el conjunto asociado a los combos tenemos:

- $A = \{x|ColorPrimario(x)\} = \{azul, rojo, amarillo\}$
- $B = \{y|ColorSecundario(y)\} = \{verde, morado, naranda\}$
- $A \times B =$
$$\left\{\begin{matrix} (azul, verde), (azul, morado), (azul, naranja), \\ (rojo, verde), (rojo, morado), (rojo, naranja), \\ (amarillo, verde), (amarillo, morado), (amarillo, naranja) \end{matrix}\right\}$$

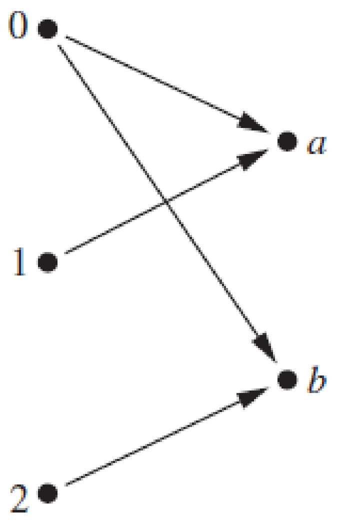
Al definir la relación $P(x, y)$: x es un componente de y tenemos que la relación $R(x, y)$ se puede representar como:

$$R = \left\{\begin{matrix} (azul, verde), (azul, morado), \\ (rojo, morado), (rojo, naranja), \\ (amarillo, verde), (amarillo, naranja) \end{matrix}\right\}$$

Relaciones

Ejemplo 2

Sea $A = \{0,1,2\}$ y $B = \{a, b\}$. Entonces, $\{(0, a), (0, b), (1, a), (2, b)\}$ es una relación de A de B. Esto significa, por ejemplo, que $0\ R\ a$, pero que $0 \not R\ b$. Las relaciones se pueden representar gráficamente, utilizando flechas para representar pares ordenados. Otra forma de representar esta relación es mediante una tabla.



R	a	b
0	×	×
1	×	
2		×

Las relaciones son más generales que las funciones. Una función es una relación donde exactamente un elemento de B está relacionado con cada elemento de A.

Relaciones

Ejemplo 3

Sea A el conjunto de ciudades de Colombia, y B el conjunto de los 32 departamentos de Colombia. Definimos una relación $R \subseteq A \times B$, tal que:

$$R = \{(a, b) | \text{la ciudad } a \text{ pertenece al departamento } b\}$$

Según lo anterior, algunos de los pares ciudad, departamento que pertenecen a la relación R son:

$$R = \{(Rionegro, Antioquia), (Medellin, Antioquia), (Cali, Valle), (Yumbo, Valle), \dots\}$$

Relaciones

Ejemplo 4 – Relación “Ganador del Premio Turing”

Dados los conjuntos:

- **Personas**: $A = \{\text{Ron Rivest}, \text{Adi Shamir}, \text{Len Adleman}, \text{Alan Kay}, \dots\}$
- **Años**: $B = \{2002, 2003, 2004, 2005, 2006\}$

Si se define la relación R con la propiedad:

$$\text{"}T(x, y)\text{: La persona } x \text{ gano el premio Turing en el año } y\text{"}$$

El conjunto de Pares ordenados que satisface esta propiedad es:

$$R = \{(x, y) \in A \times B | T(x, y)\}$$

$$R = \left\{\begin{matrix} \text{(Ron Rivest, 2002), (Adi Shamir, 2002), (Len Adleman, 2002), (Alan Kay, 2003),} \\ \text{(Vint Cerf, 2004), (Robert Kahn, 2004), (Peter Naur, 2005), (Frances Allen, 2006)} \end{matrix}\right\}$$

Relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Definición: Relación binaria sobre un solo conjunto

Una relación binaria sobre un conjunto A es una regla que conecta elementos del conjunto consigo mismos, es decir, relaciona pares de elementos del mismo conjunto. A diferencia de las relaciones entre dos conjuntos distintos (como entre A y B), este tipo de relación es interna a A. Formalmente, una relación binaria se define como un subconjunto de $A \times A$

$$R \subseteq A \times \mathrm{A}$$

O bien:

$$R = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in A) \wedge P(x, y)\}$$

Donde $P(x, y)$ representa la propiedad o condición que deben cumplir los elementos para estar relacionados

Relaciones

Ejemplo 5

Sea $A = \{1,2,3,4\}$ determine:

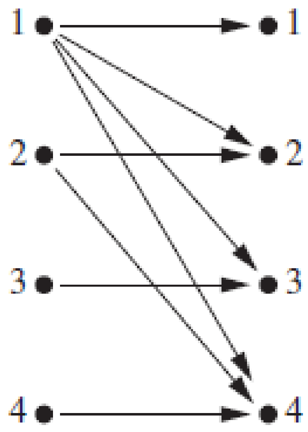
- $A \times A$
- Los pares ordenados de la relación $R = \{(a,b) | a \text{ divide a } b\}$

Solución: Para producto cartesiano tenemos:

$$A \times A = \{1,2,3,4\} \times \{1,2,3,4\} = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4) \end{Bmatrix}$$

Para el caso de la relación el resultado es el siguiente:

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,3), (4,4)\}$$



R	1	2	3	4
1	×	×	×	×
2		×		×
3			×	
4				×

Relaciones

Ejemplo 6

Sea $A = \{x | x \text{ sea una hora del dia}\}$ determine los elementos de la relación

$$R = \{(x, y) | x \text{ sea una hora antes de } y\}$$

Solución: Para el caso tenemos:

$$R = \{(12,1), (1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6), (6,7), (7,8), (8,9), (9,10), (10,11), (11,12)\}$$

Relaciones

Numero de relaciones existentes en un conjunto con n elementos

- Una relación sobre un conjunto A es un subconjunto del producto cartesiano $A \times \mathrm{A}$.
- Si el conjunto A tiene n elementos, luego $A \times \mathrm{A}$, tiene $|A \times \mathrm{A}| = |A||A| = n^2$
- Un conjunto con m elementos tiene 2^m subconjuntos, de modo que, el conjunto $A \times A$ tendrá 2^{n^2} subconjuntos.
- **Conclusión**: en un conjunto de n elementos hay 2^{n^2} relaciones posibles.

$$|A \times \mathrm{A}| = n^2 \rightarrow |\mathcal{P}(A \times \mathrm{A})| = 2^{|A \times A|} = 2^{n^2}$$

Relaciones

Ejemplo

La siguiente tabla muestra diferentes escenarios posibles y la cantidad de relaciones posibles:

Contexto	Conjuntos	Numero de relaciones posibles
Colores primarios y secundarios	• $A = \{azul, rojo, amarillo\}$ • $B = \{verde, morado, naranda\}$	$n_R = 2^{\|A\times B\|} = 2^{\|A\|\|B\|} = 2^{3\times 3} = 2^9 = 512$
Combinación números y letras	• $A = \{0,1,2\}$ • $B = \{a, b\}$	$n_R = 2^{\|A\times B\|} = 2^{\|A\|\|B\|} = 2^{3\times 2} = 2^6 = 64$
Ciudades y departamentos de Colombia	• $A = \{x \| x \text{ es una ciudad}\}$ • $B = \{y \| y \text{ es un departamento}\}$	$n_R = 2^{\|A\times B\|} = 2^{\|A\|\|B\|} = 2^{151\times 32} = 2^{4832}$
Conjunto de números	• $A = \{1,2,3,4\}$	$n_R = 2^{\|A\times A\|} = 2^{\|A\|^2} = 2^{4^2} = 2^{16} = 65536$

Relaciones

Dominio y rango de una relación

El dominio y el rango de una relación permite describir con precisión qué elementos están realmente involucrados en la relación.

Dominio:

- Es el conjunto de todos los primeros elementos de los pares ordenados en la relación.
- Dominio ($\mathrm{dom}(R)$) de la relación $R \subseteq A \times B$, es un subconjunto de A ($\mathrm{dom}(R) \subseteq A$), tal que:

$$\mathrm{dom}(R) = \delta(R) = \left\{ x \middle| (x \in A) \wedge \exists y \left(y \in B \wedge \left((x, y) \in R \right) \right) \right\}$$

Rango:

- Es el conjunto de todos los segundos elementos de los pares ordenados en la relación.
- Rango ($\mathrm{ran}(R)$) de la relación $R \subseteq A \times B$, es un subconjunto de B ($\mathrm{ran}(R) \subseteq B$), tal que:

$$\mathrm{ran}(R) = \gamma(R) = \left\{ y \middle| (y \in B) \wedge \exists x \left(x \in A \wedge \left((x, y) \in R \right) \right) \right\}$$

Relaciones

Ejemplo

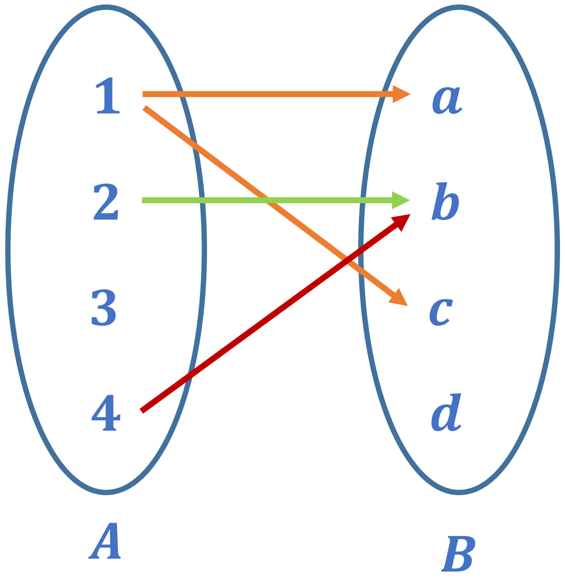
Suponga que tiene los siguientes conjuntos y la relación R dada por:

- **Conjunto de partida**: $A = \{1,2,3,4\}$
- **Conjunto de llegada**: $B = \{a, b, c, d\}$
- **Relación**: $R = \{(1, a), (1, c), (2, b), (4, b)\}$

Determine el dominio y el rango de la relación.

$$\operatorname{dom}(R) = \left\{x \middle| (x \in A) \wedge \exists y \left(y \in B \wedge \big((x, y) \in R\big)\right)\right\}$$

$$\operatorname{ran}(R) = \left\{y \middle| (y \in B) \wedge \exists x \left(x \in A \wedge \big((x, y) \in R\big)\right)\right\}$$



R	a	b	c	d
1	X		X	
2		X		
3				
4		X		

Dominio:

$$\operatorname{dom}(R) = \{1,2,4\}$$

Rango:

$$\operatorname{ran}(R) = \{a, b, c\}$$

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Inversa de una relación

La inversión de una función, consiste esencialmente en "dar la vuelta" o "revertir" la dirección de todas las conexiones de la relación original.

Definición formal: Sea $R \subseteq A \times B$ una relación entre los conjuntos A y B. La relación inversa de R, denotada como R^{-1} invierte el orden de todos los pares ordenados de R, esto es:

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

Propiedades útiles

1. Doble inversa: $(R^{-1})^{-1} = R$
2. Intercambio del dominio y rango:

$$\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{ran}(R), \qquad \mathrm{ran}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R),$$

3. Si R es una relación sobre un mismo conjunto A, entonces $R^{-1} \subseteq A \times A$, también es una relación sobre A

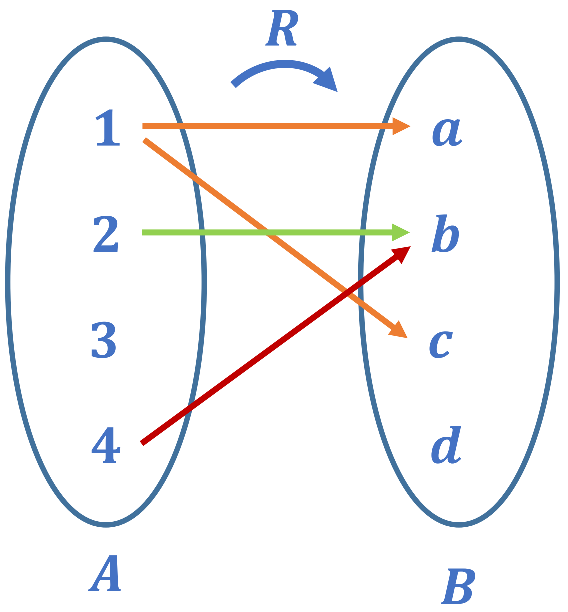
Relaciones

Ejemplo 7

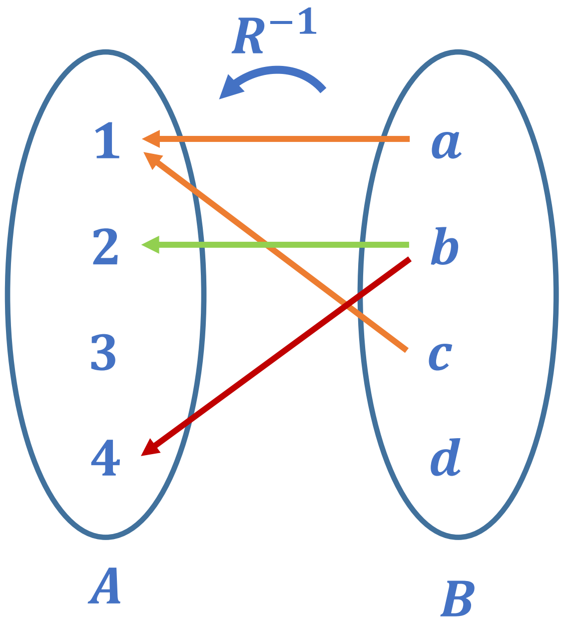
Suponga que tiene los siguientes conjuntos y la relación R dada por:

- **Conjunto de partida**: $A = \{1,2,3,4\}$
- **Conjunto de llegada**: $B = \{a, b, c, d\}$
- **Relación**: $R = \{(1,a),(1,c),(2,b),(4,b)\}$

Determine la relación inversa y obtenga el dominio y rango de esta:



R	a	b	c	d
1	X		X	
2		X		
3				
4		X		



R^{-1}	1	2	3	4
a	X			
b		X		X
c	X			
d				

$\mathrm{dom}(R) = \{1,2,4\}$, $\mathrm{ran}(R) = \{a, b, c\}$

$\mathrm{dom}(R^{-1}) = \{a, b, c\}$, $\mathrm{ran}(R^{-1}) = \{1,2,4\}$

Relaciones

Ejemplo 8

Sea $A = \{2,3,4\}$ y $B = \{2,6,8\}$ y sea R la relación "divide" de A a B. Para toda $(x, y) \in A \times B$,

$$x \, R \, y \iff x|y \qquad x \text{ divide } y$$

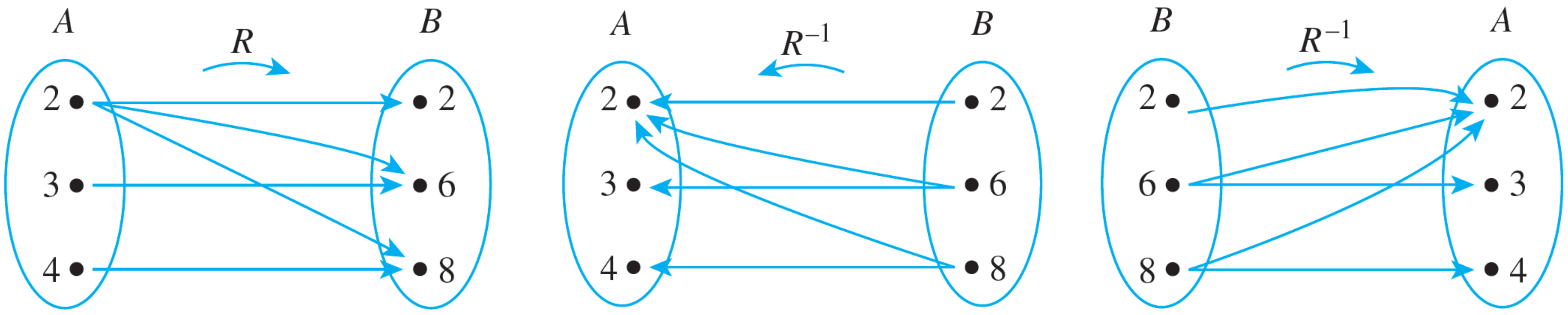
a. Establezca explícitamente que pares ordenados están en R y R^{-1} y dibuje los diagramas de flechas para R y R^{-1}.

b. Describa R^{-1} en palabras.

Relaciones

Ejemplo 8 - Solución

a. Tenemos que para $A = \{2,3,4\}$ y $B = \{2,6,8\}$:



$$R = \{(x, y) | \text{y mod } x = 0\}$$

$$R = \{(2,2), (2,6), (2,8), (3,6), (4,8)\}$$

$$R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$$

$$R^{-1} = \{(2,2), (6,2), (8,2), (6,3), (8,4)\}$$

b. Para el caso podemos ver que: Para toda $(x, y) \in A \times B$, $y\, R^{-1}\, x \iff y$ es multiplo de x

$$R^{-1} = \{(y, x) | y \text{ es multiplo de } x\}$$

Relaciones

Ejemplo 9

Se define una relación R de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ como sigue. Para toda $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$x\,R\,y \iff y = 2|x|$$

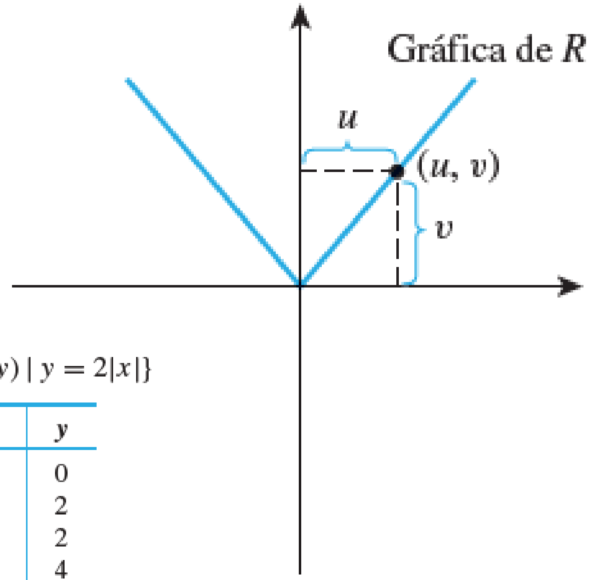
a. Dibuje las graficas de R y R^{-1} en el plano cartesiano

b. ¿Es R^{-1} una función?

Relaciones

Ejemplo 9 - Solución

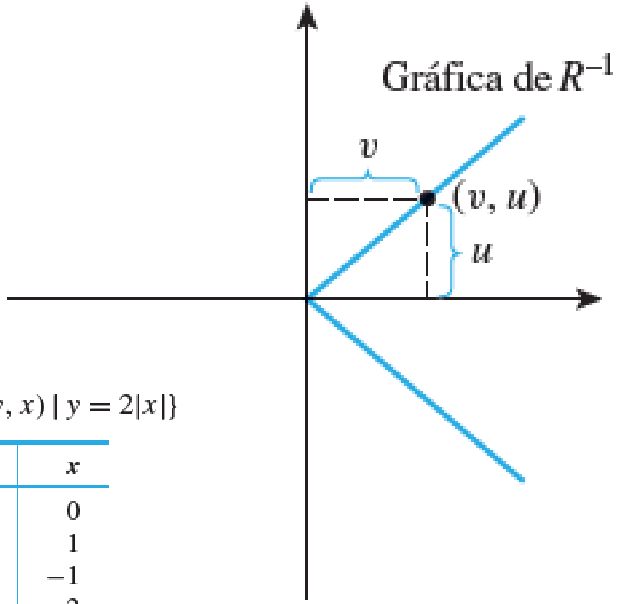
a. Tenemos:



$R = \{(x, y) \mid y = 2|x|\}$

x	y
0	0
1	2
−1	2
2	4
−2	4

1a. coordenada — 2a. coordenada



$R^{-1} = \{(y, x) \mid y = 2|x|\}$

y	x
0	0
2	1
2	−1
4	2
4	−2

1a. coordenada — 2a. coordenada

b. R^{-1} no es una función ya que $(2{,}1)$ y $(2,-1)$ están en R^{-1}

Relaciones

Relación identidad

Esta es una relación que solo relaciona cada **elemento consigo mismo**, y con ningún otro.

Definición formal: Dado un conjunto A, la relación identidad A, denotada como I_A, es el conjunto de todos los pares ordenados donde cada elemento está relacionado consigo mismo, esto es:

$$I_A = \{(x, y) | x \in A \ \wedge x = y\}$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}$ y $B = \{1,2,3\}$, obtenga la relación identidad para cada uno:

$$I_A = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$$

$$I_B = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- **Propiedades de las relaciones**
- Representación de las relaciones

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Propiedades

A continuación se listan las propiedades (o características) de las relaciones:

1. Propiedad reflexiva.
2. Propiedad no reflexiva.
3. Propiedad antireflexiva.
4. Propiedad simétrica.
5. Propiedad no simétrica.
6. Propiedad antisimétrica.
7. Propiedad asimétrica.
8. Propiedad transitiva.
9. Propiedad no transitiva.
10. Propiedad antitransitiva.

Propiedades de las relaciones

Propiedades

Antes de explicar las diferentes propiedades, suponiendo que se tiene el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ y las siguientes relaciones sobre este:

- $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
- $S = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
- $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$
- $W = \{(3,4)\}$

Propiedades de las relaciones

Relación Reflexiva

De manera informal, esta es una relación que solo relaciona cada **elemento consigo mismo**, y con ningún otro.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es reflexiva si, y solo si, todas las parejas de $A \times A$, cuyos componentes sean iguales pertenecen a R, esto es:

$$R \text{ es reflexiva} \leftrightarrow \forall x\big((x, x) \in R\big)$$

Ejemplo:

Determine cuales relaciones de las anteriormente dadas (R, S, T, U, V, W) sobre $A = \{1,2,3,4\}$ son reflexivas:

- $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\} \rightarrow T \text{ es reflexiva}$
- $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\} \rightarrow T \text{ es reflexiva}$

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación no Reflexiva

La relación **no es reflexiva** si **al menos** un elemento de A **no está relacionado consigo mismo**.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es no reflexiva si, y solo si, **no todas** las parejas de $A \times A$, cuyos componentes sean iguales pertenecen a R:

$$R \text{ es no reflexiva} \leftrightarrow \exists x\big((x,x) \notin R\big)$$

Ejemplo:

Determine cuales relaciones de las anteriormente dadas (R, S, T, U, V, W) sobre $A = \{1,2,3,4\}$ son no reflexivas:

- $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,1),(4,4)\}$; $\textbf{falta:}\ (3,3) \rightarrow R$ es no reflexiva
- $S = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$; $\textbf{faltan:}\ (2,2),(3,3),(4,4) \rightarrow S$ es no reflexiva
- $U = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$; $\textbf{faltan:}\ (1,3),(2,2),(3,3),(4,4) \rightarrow U$ es no reflexiva
- $W = \{(3,4)\}$; $\textbf{faltan:}\ (1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \rightarrow W$ es no reflexiva

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación antirreflexiva

Una relación es **antirreflexiva** (o **irreflexiva**) cuando ningún elemento del conjunto está relacionado consigo mismo.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es antireflexiva si, y solo si, **ninguna** de las parejas de $A \times A$, cuyos componentes sean iguales, cumplen R:

$$R \text{ es antirreflexiva} \leftrightarrow \neg\exists x\big((x,x) \in R\big)$$

Ejemplo:

Determine cuales relaciones de las anteriormente dadas (R, S, T, U, V, W) sobre $A = \{1,2,3,4\}$ son antirreflexivas:

- $U = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3)\}$; **faltan**: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \rightarrow U$ es antirreflexiva
- $W = \{(3,4)\}$; **faltan**: $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4) \rightarrow W$ es antireflexiva

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación simétrica

Una relación es simétrica si es una "relación de ida y vuelta", es decir Si a está relacionado con b, entonces b también lo está con a.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es simétrica si **todas** de las parejas ordenadas del conjunto producto $A \times A$ cumplen que: Si $(x, y) \in R$, entonces cumplen$(y, x) \in R$:

$$R \text{ es simetrica} \leftrightarrow \forall x \forall y \big((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R\big)$$

Ejemplo:

Determine cuales relaciones de las anteriormente dadas (R, S, T, U, V, W) sobre $A = \{1,2,3,4\}$ son simetricas:

- $S = \{(1,1), (1,2), (2,1)\} \rightarrow S \text{ es simétrica}$
- $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\} \rightarrow T \text{ es simétrica}$

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación no simétrica

Una relación no simétrica es una "relación de un solo sentido" o una que no siempre es de ida y vuelta, en otras palabras es una relación en la cual cuando existe al menos un par de elementos donde uno se relaciona con el otro, pero no al revés.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es no simétrica si, y solo si, **no todas** las parejas de $A \times A$, cumplen que: Si $(x, y) \in R$, entonces cumplen$(y, x) \in R$:

$$R \text{ es no simetrica} \leftrightarrow \neg\forall x \forall y\big((x, y) \in R \to (y, x) \in R\big)$$

Ejemplo:

Determine cuales relaciones de las anteriormente dadas (R, S, T, U, V, W) sobre $A = \{1,2,3,4\}$ son no simetricas:

- $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$; **faltan**: $(4,3), (4,1) \to R$ es no simetrica
- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$; **ningun par tiene su inverso** $\to U$ es no simetrica
- $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\} \to$ **faltan muchos pares inversos** $\to$ V es no simetrica
- $W = \{(3,4)\}$; **falta**: $(4,3) \to W$ no simetrica

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación antisimétrica

De manera informal, una relación antisimétrica es una "relación de un solo sentido estricto“ lo cual implica que solo se acepta el "doble vínculo" si es con uno mismo.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es antisimétrica si, y solo si, **ninguna** de las parejas ordenadas del conjunto producto $A \times A$ cumplen que: Si $(x, y) \in R$, entonces cumplen$(y, x) \in R$:

$$R \text{ es antisimetrica} \leftrightarrow \forall x \forall y \big((x, y) \in R \wedge x \neq y \rightarrow (y, x) \notin R\big)$$

Ejemplo:

Determine cuales relaciones de las anteriormente dadas (R, S, T, U, V, W) sobre $A = \{1,2,3,4\}$ son antisimetricas:

- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$; **ningun par tiene su inverso** $\rightarrow U$ es antisimetrica
- $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\} \rightarrow$ **no hay pares invertidos distintos** $\rightarrow V$ es antisimétrica
- $W = \{(3,4)\}$; **falta su inverso**: $(4,3) \rightarrow W$ es antisimetrica

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación asimétrica

De manera informal, una relación es asimétrica cuando todo va en un solo sentido y nunca hay retroceso. Además, nadie se relaciona consigo mismo (no hay lazos).

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es asimétrica si, y solo si, se cumple que: Si $(x, y) \in R$, entonces $(y, x) \notin R$:

$$R \text{ es asimetrica} \leftrightarrow \forall x \forall y \big((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \notin R\big)$$

Ejemplo:

Determine cuales relaciones de las anteriormente dadas (R, S, T, U, V, W) sobre $A = \{1,2,3,4\}$ son asimétricas:

- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$; **No hay lazos** $\rightarrow U$ es asimetrica
- $W = \{(3,4)\}$; **No hay lazos**: Unico elemento $\rightarrow W$ es ametrica

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación transitiva

Una relación es transitiva cuando si un elemento está relacionado con un segundo, y ese segundo con un tercero, entonces el primero también está relacionado con el tercero. Es como una especie de "cadena lógica" que debe cerrarse.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es transitiva, si y solo si, se cumple que: si un elemento esta relacionado con un segundo y este con un tercero, el primero esta relacionado con el tercero:

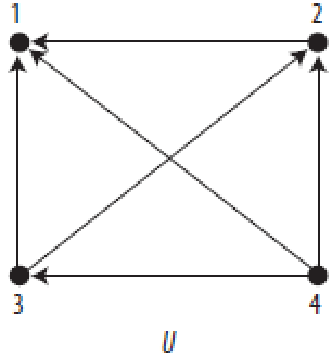
$$R \text{ es transitiva} \leftrightarrow \forall x \forall y \forall z\big((x,y) \in R \wedge (x,z) \in R \rightarrow (x,z) \in R\big)$$

Ejemplo:

Determine cuales relaciones de las anteriormente dadas (R, S, T, U, V, W) sobre $A = \{1,2,3,4\}$ son transitivas:

- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
  - $(3,2) \rightarrow (2,1) \rightarrow (3,1) \in U$
  - $(4,2) \rightarrow (2,1) \rightarrow (4,1) \in U$
  - $(4,3) \rightarrow (3,1) \rightarrow (4,1) \in U$
  - $(4,3) \rightarrow (3,2) \rightarrow (4,2) \in U$
- Las otras relaciones transitivas son: V y W.

U	1	2	3	4
1				
2	√			
3	√	√		
4	√	√	√	



Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación no transitiva

Una relación es no transitiva cuando la lógica de “si A se relaciona con B y B con C, entonces A con C” no siempre se cumple. Es decir, hay al menos un caso donde esa cadena se rompe.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es no transitiva, si y solo si, se cumple que: un elemento esta relacionado con un segundo, este con un tercero y el primero no esta relacionado con el tercero.

$$R \text{ es no transitiva} \leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \big((x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \wedge (x, z) \notin R\big)$$

Ejemplo:

Determine cuales relaciones de las anteriormente dadas (R, S, T, U, V, W) sobre $A = \{1,2,3,4\}$ son no transitivas:

- $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
  - $(3,4) \rightarrow (4,1) \rightarrow (3,1) \notin R$
- $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
  - $(2,1) \rightarrow (1,4) \rightarrow (2,4) \notin R$

Propiedades de las relaciones

Relación antitransitiva

Informalmente, una relación es antitransitiva si es una "relación sin atajos" o una "relación de un solo paso". En otras palabras es como una regla que rompe la cadena lógica: si hay dos pasos seguidos, no puede haber un tercero que cierre el ciclo.

Definición formal: Una relación $R \in A \times A$, es antitransitiva, si y solo si, se cumple que: si un elemento esta relacionado con un segundo y este con un tercero, el primero no esta relacionado con el tercero.

$$R \text{ es no transitiva} \leftrightarrow \forall x \forall y \forall z \big((x, y) \in R \wedge (x, z) \in R \rightarrow (x, z) \notin R \big)$$

Ejemplo:

Determine cuales relaciones de las anteriormente dadas (R, S, T, U, V, W) sobre $A = \{1,2,3,4\}$ son antitransitivas:

- $W = \{(4,3)\}$
  - Como hay un solo par $(4,3)$ no existen dos pares consecutivos, así que W es antitransitiva por vacuidad.

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Resumen

La siguiente tabla resume las propiedades de las relaciones, asumiendo una relación de R sobre un conjunto A (es decir $R \subseteq A \times A$)

Propiedad	Descripción formal	Descripción informal
Reflexiva	$\forall x \in A, (x, x) \in R$	Todo elemento se relaciona consigo mismo
No Reflexiva	$\exists x \in A, (x, x) \notin R$	Hay al menos un elemento que no se relaciona consigo mismo
Antireflexiva	$\forall x \in A, (x, x) \notin R$	Ningún elemento se relaciona consigo mismo
Simétrica	$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$	Si un elemento se relaciona con otro, también al revés
No Simétrica	$\exists x, y \in A, (x, y) \in R \land (y, x) \notin R$	Hay al menos un par que no cumple la simetría
Antisimétrica	$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \land (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$	Si dos elementos se relacionan en ambos sentidos, deben ser iguales
Asimétrica	$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \notin R$	Si un elemento se relaciona con otro, no ocurre al revés
Transitiva	$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$	Si un elemento se relaciona con un segundo, y este con un tercero, entonces el primero se relaciona con el tercero
No transitiva	$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \land (x, z) \notin R$	Hay casos donde se rompe la transitividad
Antitransitiva	$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \notin R$	Nunca se forma una cadena transitiva

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Resumen resultados

Antes de explicar las diferentes propiedades, suponiendo que se tiene el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ y las siguientes relaciones sobre este:

- $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
- $S = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
- $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$
- $W = \{(3,4)\}$

Propiedades de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Resumen resultados

	Relación					
Propiedad	$R = \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\\(2,1),(2,2),\\(3,4),(4,1),\\(4,4)\end{matrix}\right\}$	$S = \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\\(2,1)\end{matrix}\right\}$	$T = \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\\(1,4),(2,1),\\(2,2),(3,3),\\(4,1),(4,4)\end{matrix}\right\}$	$U = \left\{\begin{matrix}(2,1),(3,1),\\(3,2),(4,1),\\(4,2),(4,3)\end{matrix}\right\}$	$V = \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\\(1,3),(1,4),\\(2,2),(2,3),\\(2,4),(3,3),\\(3,4),(4,4)\end{matrix}\right\}$	$W = \{(3,4)\}$
Reflexiva	No	No	Si	No	Si	No
No Reflexiva	Si	Si	No	Si	No	Si
Antireflexiva	No	No	No	Si	No	Si
Simétrica	No	Si	Si	No	No	No
No Simétrica	Si	No	No	Si	Si	Si
Antisimétrica	No	No	No	Si	Si	Si
Asimétrica	No	No	No	Si	No	Si
Transitiva	No	No	No	Si	Si	Si
No transitiva	Si	Si	Si	No	No	No
Antitransitiva	No	No	No	No	No	Si

Agenda

- Introducción
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- Propiedades de las relaciones
- **Representación de las relaciones**

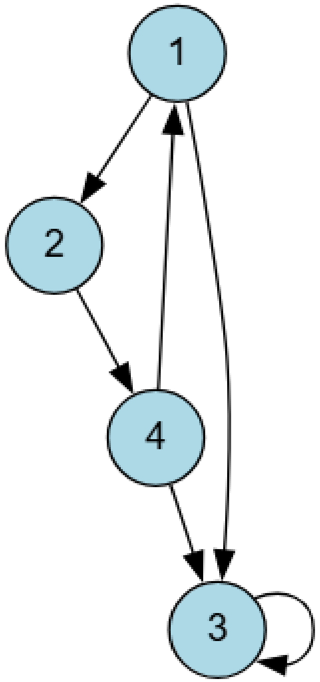
Representación de las relaciones

Contextualización

De las diferentes formas de representación de una relación vamos a hacer énfasis en:

- Representación usando matrices
- Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Representación usando matrices

- Una relación entre conjuntos finitos se puede representar mediante una matriz de ceros y unos conocida como matriz de adyacencia o matriz booleana.
- Suponiendo que R es una relación de $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ a $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$
  - Los elementos de los dos conjuntos se pueden ordenar arbitrariamente. Cuando $A = B$, se utiliza el mismo orden.
- La relación R puede ser representada mediante una matriz $M_R = \left[m_{ij}\right]$ donde,

$$m_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{si } \left(a_i, b_j\right) \in R \\ 0; & \text{si } \left(a_i, b_j\right) \notin R \end{cases}$$

- La matriz que representa R tiene un 1 como su entrada (i, j) cuando a_i está relacionado con b_j y un 0 si a_i no está relacionado con b_j.

Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Representación usando matrices

Ejemplo 1: Suponga que $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{1,2\}$. Sea R la relación de A a B que contiene (a, b) si $a \in A, b \in B$ y $a > b$, b ∈ B y a > b. ¿Cuál es la matriz que representa R (suponiendo que el orden de los elementos coincide con el orden numérico creciente?

Solución: Según el enunciado, $R = \{(a, b) | a > b\}$, donde para el caso:

$$R = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$$

De este modo:

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Representación de las relaciones

Representación usando matrices

Ejemplo 2: Sea $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$. ¿Qué pares ordenados están en la relación R representada por la matriz?

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Como R está formada por los pares ordenados (a_i, b_j) con $m_{ij} = 1$, se deduce que:

$$R = \{(a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_3), (a_2, b_4), (a_3, b_1), (a_3, b_3), (a_3, b_5)\}$$

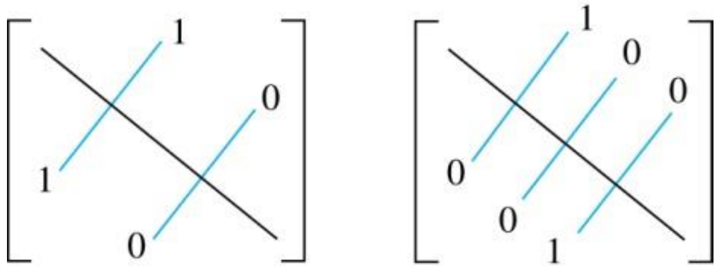
Representación de las relaciones

Matrices de relaciones en conjuntos

- Si R es una relación reflexiva, todos los elementos de la diagonal principal de M_R son iguales a 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

- R es una relación simétrica si y solo si $m_{ij} = 1$ siempre que $m_{ji} = 1$. R es una relación antisimétrica si y solo si $m_{ij} = 0$ o $m_{ji} = 0$ cuando $i \neq j$.



(a) Symmetric (b) Antisymmetric

Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Representación usando matrices

Ejemplo 3: Supongamos que la relación R en un conjunto esta representada por la matriz

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

¿Es R reflexiva, simétrica y/o antisimétrica?

Solución: Como todos los elementos diagonales son iguales a 1, **R es reflexiva**. Como **M_R es simétrica**, **R es simétrica y no antisimétrica**, ya que tanto $m_{1,2}$ como $m_{2,1}$ son 1.

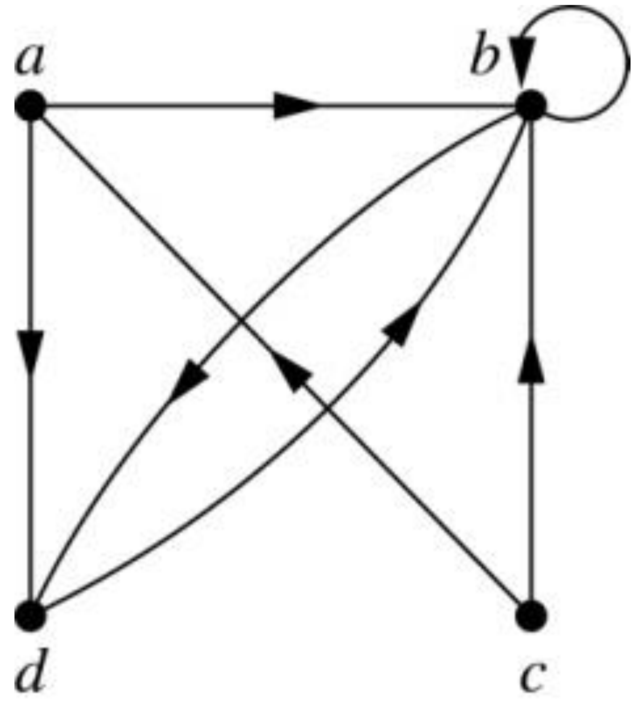
Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

- Un grafo dirigido, o dígrafo, consiste en un conjunto V de vértices (o nodos) junto con un conjunto E de pares ordenados de elementos de V, llamados aristas (o arcos). El vértice a se denomina vértice inicial de la arista (a, b), y el vértice b se denomina vértice terminal de esta arista.
  - Una arista de la forma (a, a) se denomina bucle.

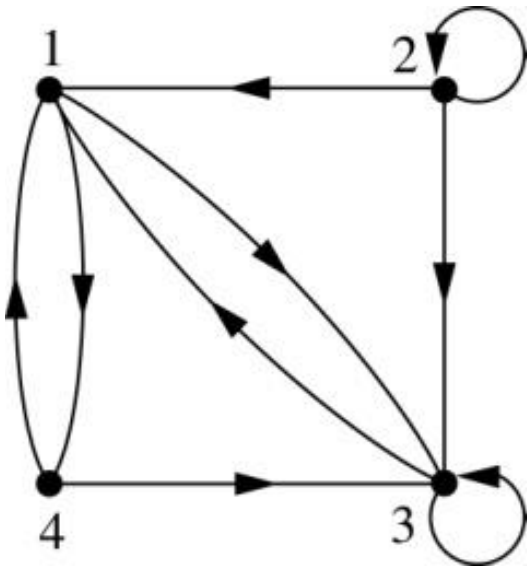
- **Ejemplo 4**: A continuación se muestra un dibujo del grafo dirigido con vértices a, b, c, d y e y aristas $(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, a), (c, b)$ y (d, b).



Representación de las relaciones

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

- **Ejemplo 5**: ¿Cuáles son los pares ordenados en la relación representada por el siguiente grafo dirigido?



Solución: La relación es:

$$R = \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,3),(4,1),(4,3)\}$$

Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Determinación de las propiedades de una relación a partir de su dígrafo

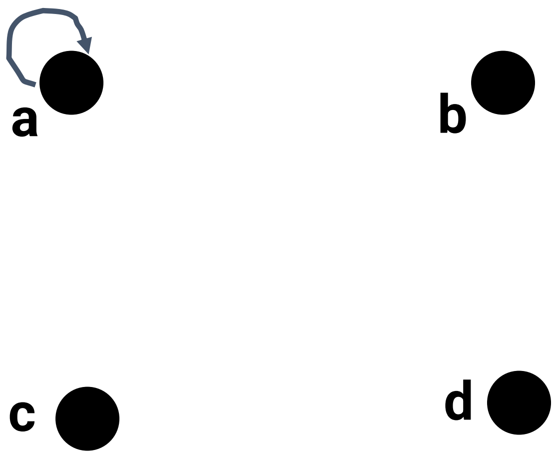
A partir del dígrafo se puede determinar el tipo de relación de R. A continuación se muestran algunos casos:

- **Reflexividad**: Debe haber un bucle en todos los vértices del grafo.
- **Simetría**: Si (x, y) es una arista, entonces (y, x) también lo es.
- **Antisimetría**: Si (x, y) con $x \neq y$ es una arista, entonces (y, x) no lo es.
- **Transitividad**: Si (x, y) y (y, z) son aristas, entonces (x, z) también lo es.

Representación de las relaciones

Determinación de las propiedades de una relación a partir de su dígrafo

Ejemplo 6: El siguiente dígrafo representa una relación R en $A = \{a, b, c, d\}$, determine las propiedades que este cumple:



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \{(a, a)\}$$

Solución:

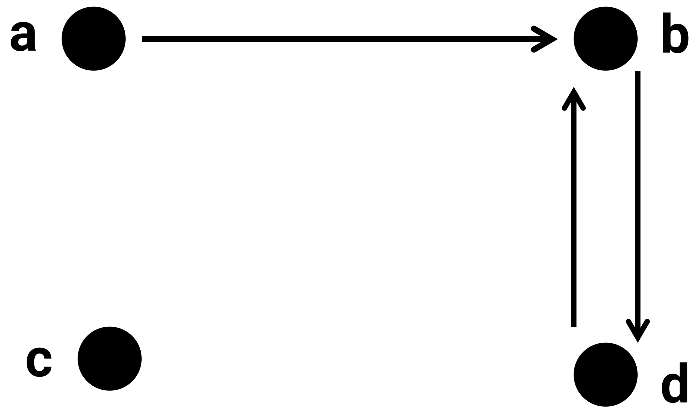
- **Reflexividad**: No, no todos los vértices tienen un bucle.
- **Simetría**: Sí (trivialmente), no hay arista de un vértice a otro.
- **Antisimetría**: Sí (trivialmente), no hay arista de un vértice a otro.
- **Transitividad**: Sí (trivialmente), ya que no hay arista de un vértice a otro.

Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Determinación de las propiedades de una relación a partir de su dígrafo

Ejemplo 7: El siguiente dígrafo representa una relación R en $A = \{a, b, c, d\}$, determine las propiedades que este cumple:



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \{(a, b), (b, d), (d, b)\}$$

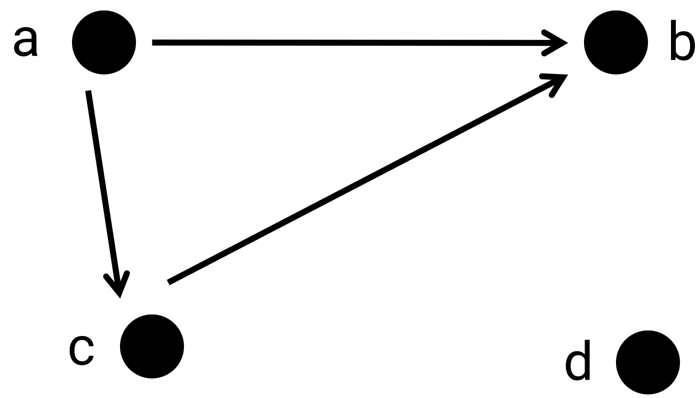
Solución:

- **Reflexividad**: **No**, no hay bucles.
- **Simetría**: **No**, hay una arista de a a b, pero no de b a a.
- **Antisimetría**: **No**, hay una arista de d a b y de b a d.
- **Transitividad**: **No**, hay aristas de a a c y de c a b, pero no hay arista de a a d.

Representación de las relaciones

Determinación de las propiedades de una relación a partir de su dígrafo

Ejemplo 8: El siguiente dígrafo representa una relación R en $A = \{a, b, c, d\}$, determine las propiedades que este cumple:



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \{(a, b), (a, c), (c, b)\}$$

Solución:

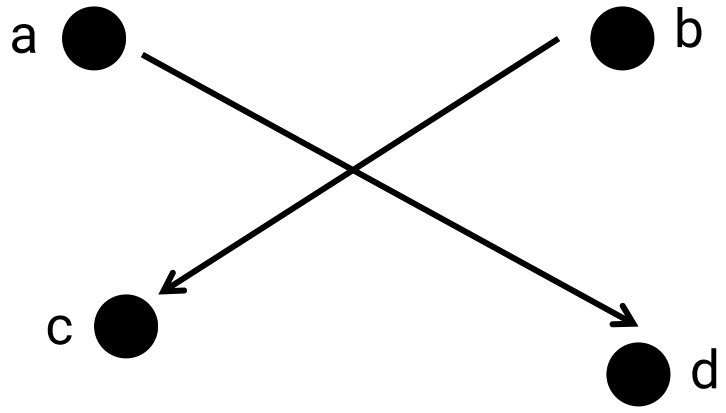
- **Reflexividad**: **No**, no hay bucles.
- **Simetría**: **No**, por ejemplo, no hay arista de c a a.
- **Antisimetría**: **Sí**, siempre que hay una arista de un vértice a otro, no hay ninguna que regrese.
- **Transitividad**: **No**, no hay arista de a a b.

Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Determinación de las propiedades de una relación a partir de su dígrafo

Ejemplo 9: El siguiente dígrafo representa una relación R en $A = \{a, b, c, d\}$, determine las propiedades que este cumple:



$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \{(a,d), (b,c)\}$$

Solución:

- **Reflexividad**: **No**, no hay bucles.
- **Simetría**: **No**, por ejemplo, no hay arista de d a a.
- **Antisimetría**: **Sí**, siempre que hay una arista de un vértice a otro, no hay ninguna que regrese.
- **Transitividad**: **Sí** (trivialmente), no hay dos aristas donde la primera arista termine en el vértice donde comienza la segunda.

Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Representación usando matrices

Ejemplo 10: Retomemos el ejemplo previamente analizado en las propiedades de las relaciones y realicemos las diferentes representaciones para cada una de las relaciones allí mostradas. Suponiendo que se tiene el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ y las siguientes relaciones sobre este:

- $R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$
- $S = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$
- $T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$
- $U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$
- $V = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4)\}$
- $W = \{(3,4)\}$

Realice cada una de las representaciones para las relaciones anteriormente mostradas.

Representación de las relaciones

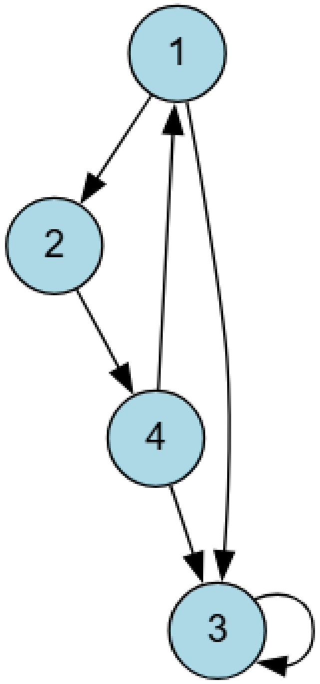
Representación usando matrices

Relación	Resultado
Reflexiva	No
No Reflexiva	Si
Antireflexiva	No
Simétrica	No
No Simétrica	Si
Antisimétrica	No
Asimétrica	No
Transitiva	No
No transitiva	Si
Antitransitiva	No

$$R = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,4), (4,1), (4,4)\}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R	1	2	3	4
1	X	X		
2	X	X		
3				X
4				X



Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

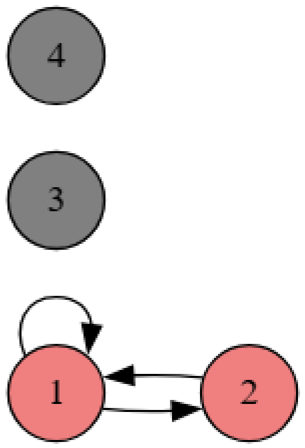
Representación usando matrices

Relación	Resultado
Reflexiva	No
No Reflexiva	Si
Antireflexiva	No
Simétrica	Si
No Simétrica	No
Antisimétrica	No
Asimétrica	No
Transitiva	No
No transitiva	Si
Antitransitiva	No

$$S = \{(1,1),(1,2),(2,1)\}$$

$$M_S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

S	1	2	3	4
1	X	X		
2	X			
3				
4				



Representación de las relaciones

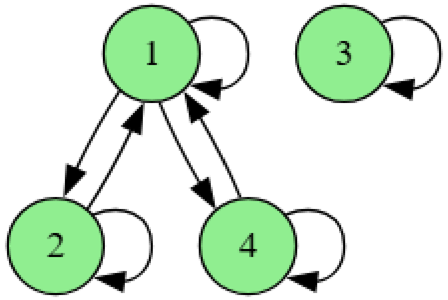
Representación usando matrices

Relación	**Resultado**
Reflexiva	Si
No Reflexiva	No
Antireflexiva	No
Simétrica	Si
No Simétrica	No
Antisimétrica	No
Asimétrica	No
Transitiva	No
No transitiva	Si
Antitransitiva	No

$$T = \{(1,1),(1,2),(1,4),(2,1),(2,2),(3,3),(4,1),(4,4)\}$$

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

T	**1**	**2**	**3**	**4**
1	X	X		X
2	X	X		
3			X	
4	X			X



Representación de las relaciones

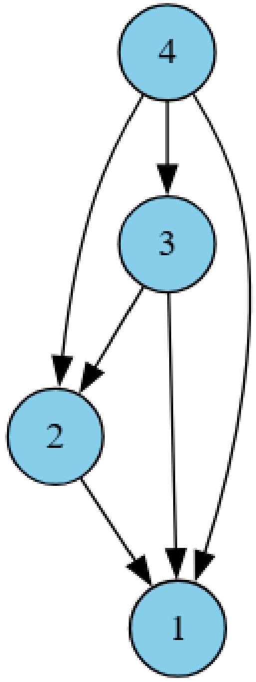
Representación usando matrices

Relación	**Resultado**
Reflexiva	No
No Reflexiva	Si
Antireflexiva	Si
Simétrica	No
No Simétrica	Si
Antisimétrica	Si
Asimétrica	Si
Transitiva	Si
No transitiva	No
Antitransitiva	No

$$U = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)\}$$

$$M_U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

U	**1**	**2**	**3**	**4**
1				
2	X			
3	X	X		
4	X	X	X	



Representación de las relaciones

Representación usando matrices

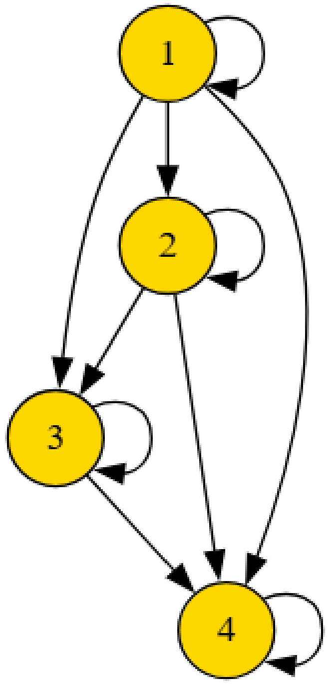
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación	**Resultado**
Reflexiva	Si
No Reflexiva	No
Antireflexiva	No
Simétrica	No
No Simétrica	Si
Antisimétrica	Si
Asimétrica	No
Transitiva	Si
No transitiva	No
Antitransitiva	No

$$V = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}$$

$$M_V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

V	**1**	**2**	**3**	**4**
1	X	X	X	X
2		X	X	X
3			X	X
4				X



Representación de las relaciones

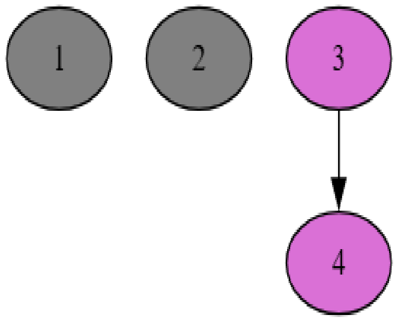
Representación usando matrices

Relación	Resultado
Reflexiva	No
No Reflexiva	Si
Antireflexiva	Si
Simétrica	No
No Simétrica	Si
Antisimétrica	Si
Asimétrica	Si
Transitiva	Si
No transitiva	No
Antitransitiva	Si

$$W = \{(3,4)\}$$

$$M_W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

W	1	2	3	4
1				
2				
3				X
4				



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Curso de Matemáticas Discretas 1

Clase 10 – Relaciones