Curso
Matemáticas Discretas I

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Clase 11 – Relaciones de Orden

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- Reflexividad, Simetría y Transitividad
- Relación antisimétrica
- Relaciones de orden
- Representación de las relaciones de orden
- Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Agenda

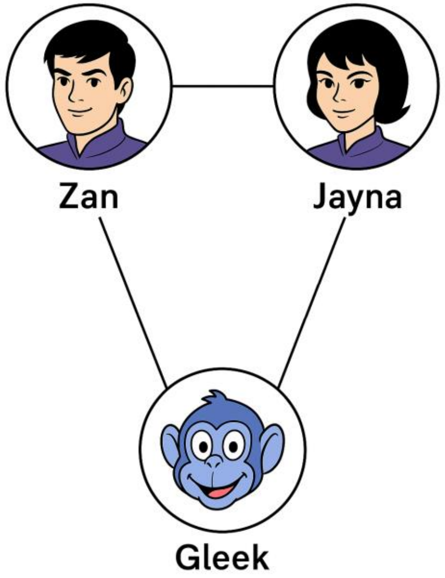
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

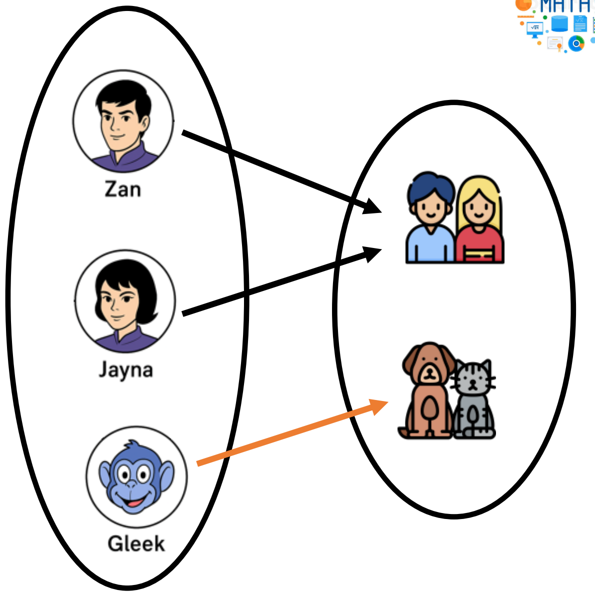
- **Repaso clase anterior**
- Reflexividad, Simetría y Transitividad
- Relación antisimétrica
- Relaciones de orden
- Representación de las relaciones de orden
- Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Algunos ejemplos






```
gemelo("Zan","Jaina").
gemelo("Jaina","Zan").
mascota("Gleek","Zan").
mascota("Gleek","Jaina").
```

```
familiaGemelos = {
     "hermano": ["Zan", “Jaina"],
     "mascota": [“Gleek"]
   }
```

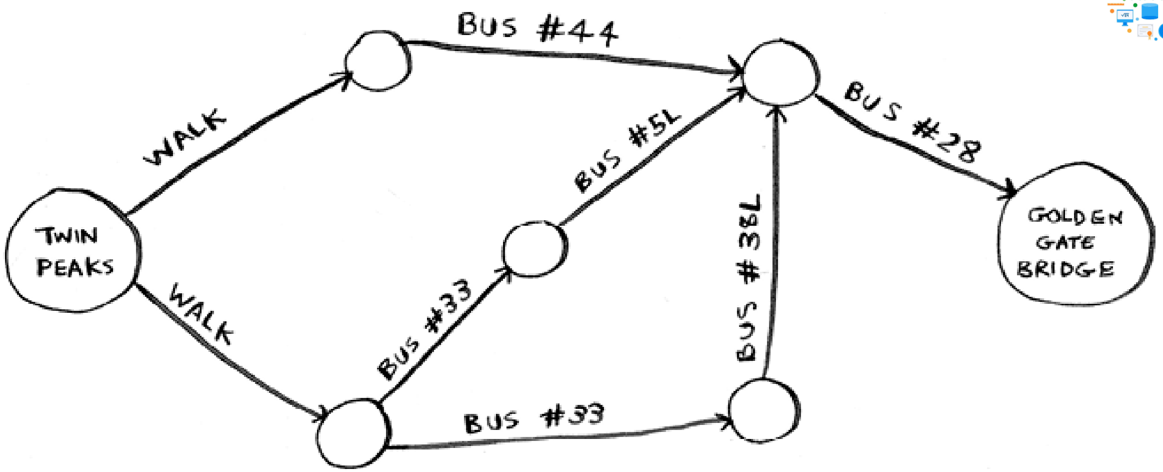
```
familiaGemelos = {
      ("Zan", "hermano"),
      ("Jaina", "hermano"),
      ("Gleek", "mascota"),
    }
```

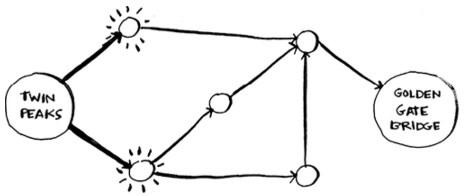
Repaso clase anterior

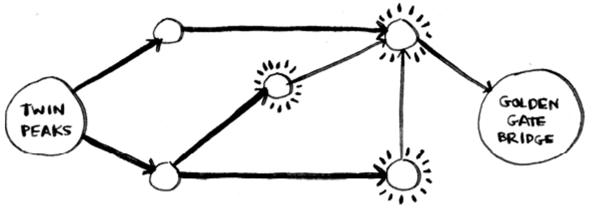
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

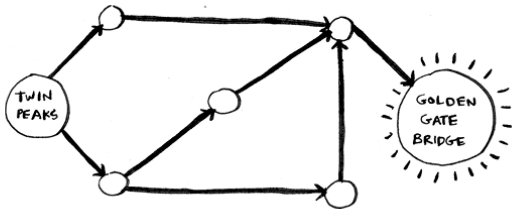
Algunos ejemplos

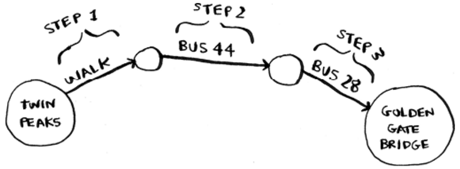
Problema típico: Ruta con menos transbordos







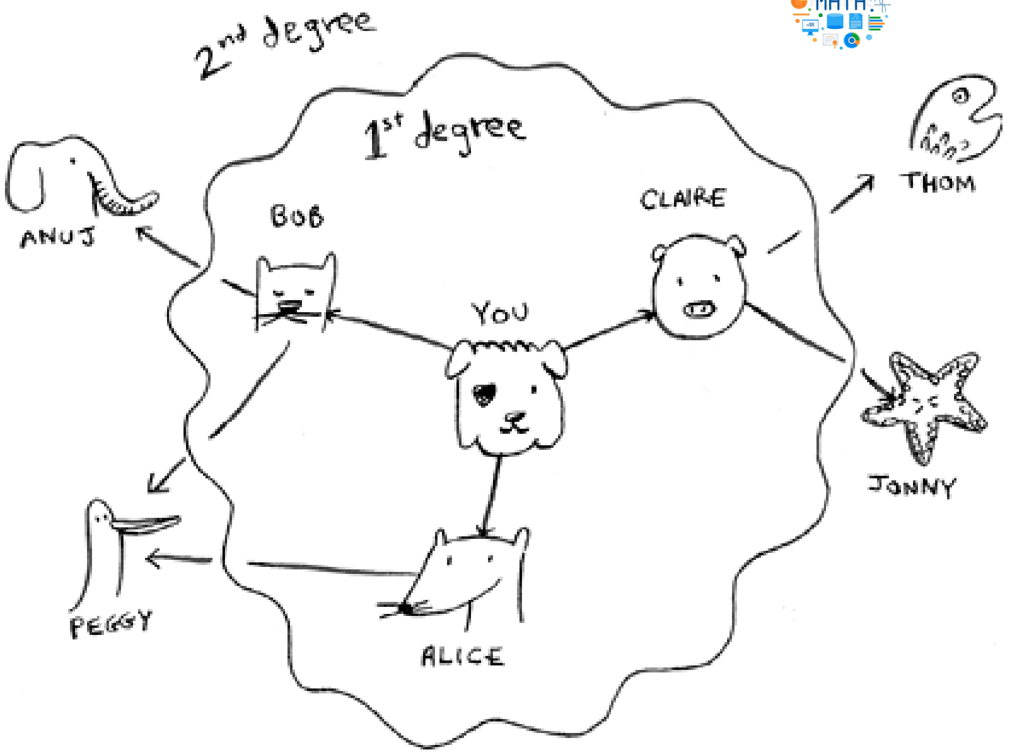




Repaso clase anterior

Algunos ejemplos

Problema típico: Redes sociales



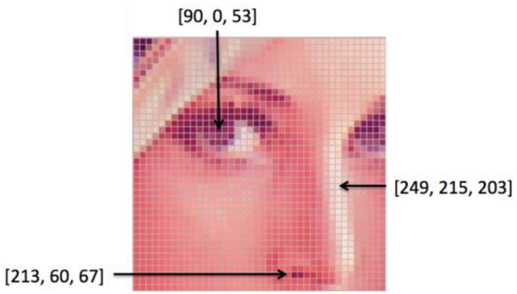

```python
graph = {}
graph["you"] = ["alice", "bob", "claire"]
graph["bob"] = ["anuj", "peggy"]
graph["alice"] = ["peggy"]
graph["claire"] = ["thom", "jonny"]
graph["anuj"] = []
graph["peggy"] = []
graph["thom"] = []
graph["jonny"] = []
```

Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

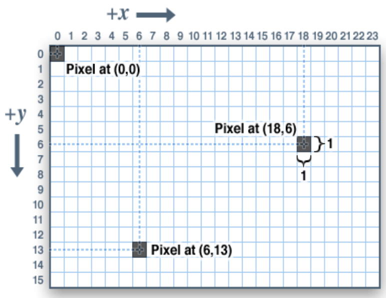
Conceptos claves

N-tuplas



(R, G, B)

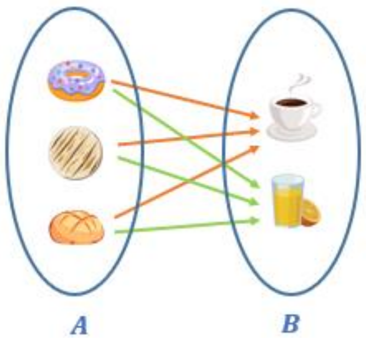
$$(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

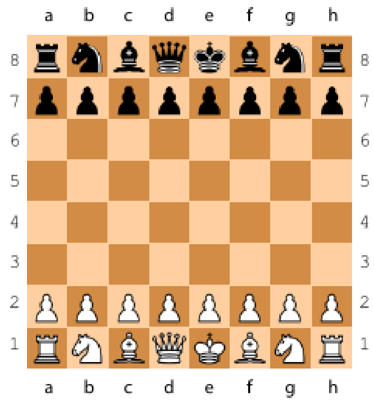


(i, j)

Producto cartesiano

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in A_i \text{ para } i = 1,2, \dots, n\}$$



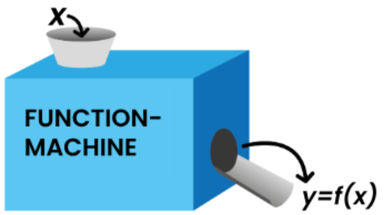


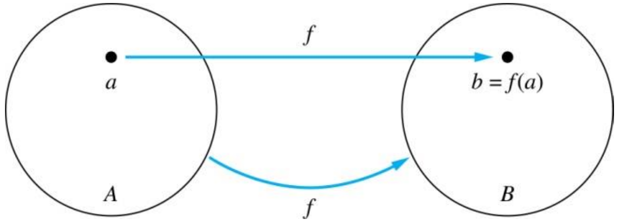
Repaso clase anterior

Conceptos claves

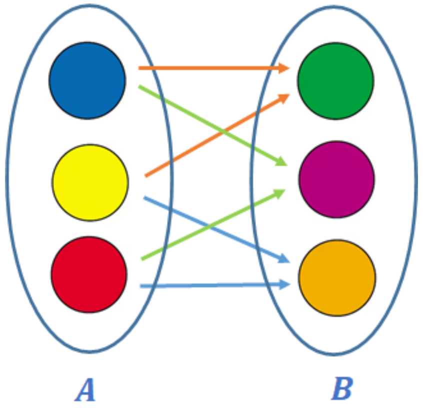
Funciones

$$f = \{(a, b) \in A \times B | \text{a cada } a \in A \text{ le corresponde un unico } b \in B\}$$

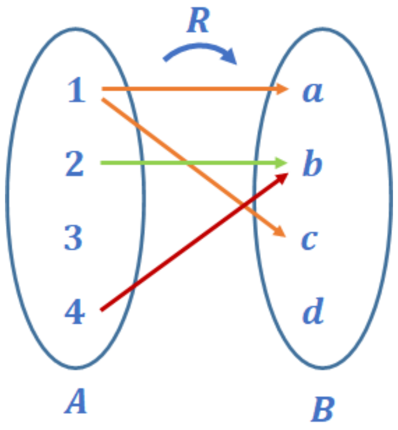




Relaciones



$$R = \{(x, y) | (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge P(x, y)\}$$



Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relaciones

Concepto	Definición	Ejemplo
Producto Cartesiano $(A \times B)$	Conjunto de todos los pares ordenados (x, y) que se pueden formar con un elemento de A y uno de B.	Si $A = \{1,2\}$, $B = \{a, b\}$ entonces: $$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$
Cardinalidad del producto cartesiano $(\|A \times B\|)$	Numero de elementos del producto cartesiano: $\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\|$	$\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\| = 2 \cdot 2 = 4$
Relación (R)	Subconjunto de $A \times B$ que cumple una propiedad $P(x, y)$	Sea R una relación $R \subseteq A \times B$ definida por: $$R = \{(1, a), (2, b)\}$$
Dominio de R $\left(\operatorname{dom}(R)\right)$	El conjunto de los primeros elementos de los pares en la relación.	$\operatorname{dom}(R) = \{1,2\}$
Rango de R $\left(\operatorname{ran}(R)\right)$	El conjunto de los segundos elementos de los pares en la relación.	$\operatorname{ran}(R) = \{a, b\}$
Número total de relaciones de A en B	Número total de relaciones de A en B: $\|\mathcal{P}(A \times B)\| = 2^{\|A\| \cdot \|B\|}$	$\|\mathcal{P}(A \times B)\| = 2^{\|A\| \cdot \|B\|} = 2^{2 \cdot 2} = 2^4 = 16$

Repaso clase anterior

Representación de las relaciones

Sea la siguiente relación $T \subseteq A^2$. Suponiendo que se tiene el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ y las siguientes relaciones sobre este y que la relación T contiene los pares de puntos:

$$T = \{(1,1), (1,2), (1,4), (2,1), (2,2), (3,3), (4,1), (4,4)\}$$

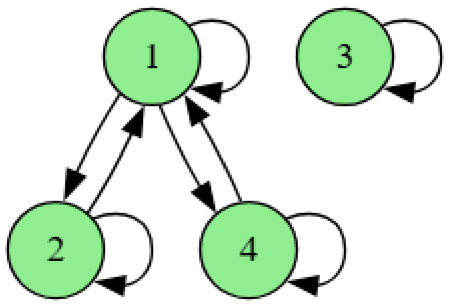
Arreglo matricial

T	1	2	3	4
1	X	X		X
2	X	X		
3			X	
4	X			X

Matriz binaria

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grafo dirigido



Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Propiedades de las relaciones

La siguiente tabla resume las propiedades de las relaciones, asumiendo una relación de R sobre un conjunto A (es decir $R \subseteq A \times A$)

Propiedad	Descripción formal	Descripción informal
Reflexiva	$\forall x \in A, (x, x) \in R$	Todo elemento se relaciona consigo mismo
No Reflexiva	$\exists x \in A, (x, x) \notin R$	Hay al menos un elemento que no se relaciona consigo mismo
Antireflexiva	$\forall x \in A, (x, x) \notin R$	Ningún elemento se relaciona consigo mismo
Simétrica	$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$	Si un elemento se relaciona con otro, también al revés
No Simétrica	$\exists x, y \in A, (x, y) \in R \land (y, x) \notin R$	Hay al menos un par que no cumple la simetría
Antisimétrica	$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \land (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$	Si dos elementos se relacionan en ambos sentidos, deben ser iguales
Asimétrica	$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \notin R$	Si un elemento se relaciona con otro, no ocurre al revés
Transitiva	$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$	Si un elemento se relaciona con un segundo, y este con un tercero, entonces el primero se relaciona con el tercero
No transitiva	$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \land (x, z) \notin R$	Hay casos donde se rompe la transitividad
Antitransitiva	$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \notin R$	Nunca se forma una cadena transitiva

Repaso clase anterior

Algunos ejemplos de propiedades de las relaciones

	Relación					
Propiedad	$R = \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\\(2,1),(2,2),\\(3,4),(4,1),\\(4,4)\end{matrix}\right\}$	$S = \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\\(2,1)\end{matrix}\right\}$	$T = \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\\(1,4),(2,1),\\(2,2),(3,3),\\(4,1),(4,4)\end{matrix}\right\}$	$U = \left\{\begin{matrix}(2,1),(3,1),\\(3,2),(4,1),\\(4,2),(4,3)\end{matrix}\right\}$	$V = \left\{\begin{matrix}(1,1),(1,2),\\(1,3),(1,4),\\(2,2),(2,3),\\(2,4),(3,3),\\(3,4),(4,4)\end{matrix}\right\}$	$W = \{(3,4)\}$
Reflexiva	No	No	Si	No	Si	No
No Reflexiva	Si	Si	No	Si	No	Si
Antireflexiva	No	No	No	Si	No	Si
Simétrica	No	Si	Si	No	No	No
No Simétrica	Si	No	No	Si	Si	Si
Antisimétrica	No	No	No	Si	Si	Si
Asimétrica	No	No	No	Si	No	Si
Transitiva	No	No	No	Si	Si	Si
No transitiva	Si	Si	Si	No	No	No
Antitransitiva	No	No	No	No	No	Si

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- **Reflexividad, Simetría y Transitividad**
- Relación antisimétrica
- Relaciones de orden
- Representación de las relaciones de orden
- Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Reflexividad, Simetría y Transitividad

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Introducción

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{2,3,4,6,7,9\}$ y la relación R sobre A la relación definida como:

$$R = \{(x, y) \in A | 3 | (x - y)\}$$

Obtenga las diferentes representaciones para la relación.

Reflexividad, Simetría y Transitividad

Introducción

Ejemplo: Sea el conjunto $A = \{2,3,4,6,7,9\}$ y la relación R sobre A la relación definida como:

$$R = \{(x, y) \in A | 3 | (x - y)\}$$

La relación constituye todas las parejas $(x, y) \in A$ cuya diferencia es divisible por 3. Es decir:

$$R = \left\{ \begin{array}{c} (2,2), (3,3), (4,4), (6,6), (7,7), (9,9), \\ (6,3), (3,6), (7,4), (4,7), (9,6), (6,9), \\ (9,3), (3,9) \end{array} \right\}$$

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{3} \vert (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$	**Resultado**
$(2,2)$	$2 - 2 = 0$	$3 \vert 0$	Verdadero
$(3,3)$	$3 - 3 = 0$	$3 \vert 0$	Verdadero
$(4,4)$	$4 - 4 = 0$	$3 \vert 0$	Verdadero
$(6,6)$	$6 - 6 = 0$	$3 \vert 0$	Verdadero
$(7,7)$	$7 - 7 = 0$	$3 \vert 0$	Verdadero
$(9,9)$	$9 - 9 = 0$	$3 \vert 0$	Verdadero
$(6,3)$	$6 - 3 = 3$	$3 \vert 3$	Verdadero
$(3,6)$	$3 - 6 = -3$	$3 \vert (-3)$	Verdadero
$(7,4)$	$7 - 4 = 3$	$3 \vert 3$	Verdadero
$(4,7)$	$4 - 7 = -3$	$3 \vert (-3)$	Verdadero
$(9,6)$	$9 - 6 = 3$	$3 \vert 3$	Verdadero
$(6,9)$	$6 - 9 = -3$	$3 \vert (-3)$	Verdadero
$(9,3)$	$9 - 3 = 6$	$3 \vert 6$	Verdadero
$(3,9)$	$3 - 9 = -6$	$3 \vert (-6)$	Verdadero

Reflexividad, Simetría y Transitividad

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Introducción

Representación como pares ordenados

$$R = \left\{ \begin{matrix} (2,2), (3,3), (4,4), (6,6), (7,7), (9,9), \\ (6,3), (3,6), (7,4), (4,7), (9,6), (6,9), \\ (9,3), (3,9) \end{matrix} \right\}$$

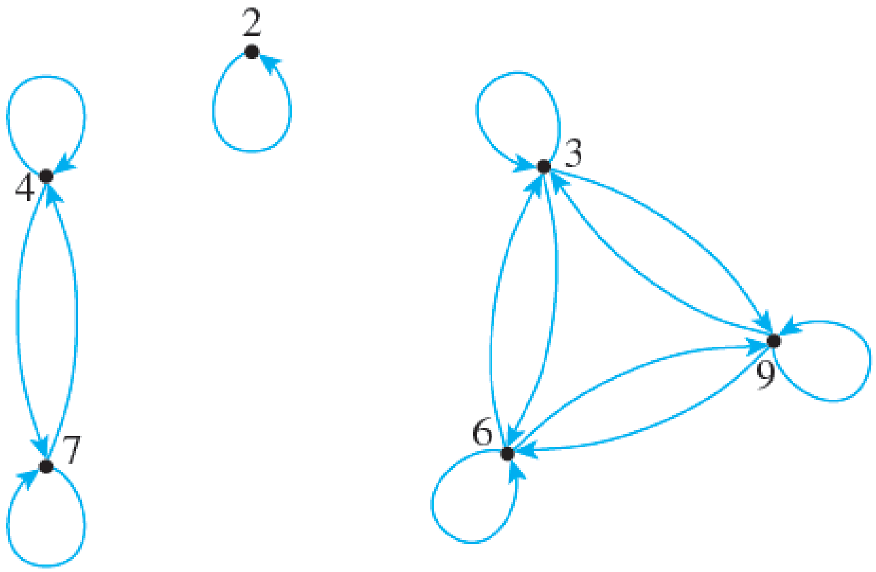
Representación como matriz binaria

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Representación como arreglo matricial

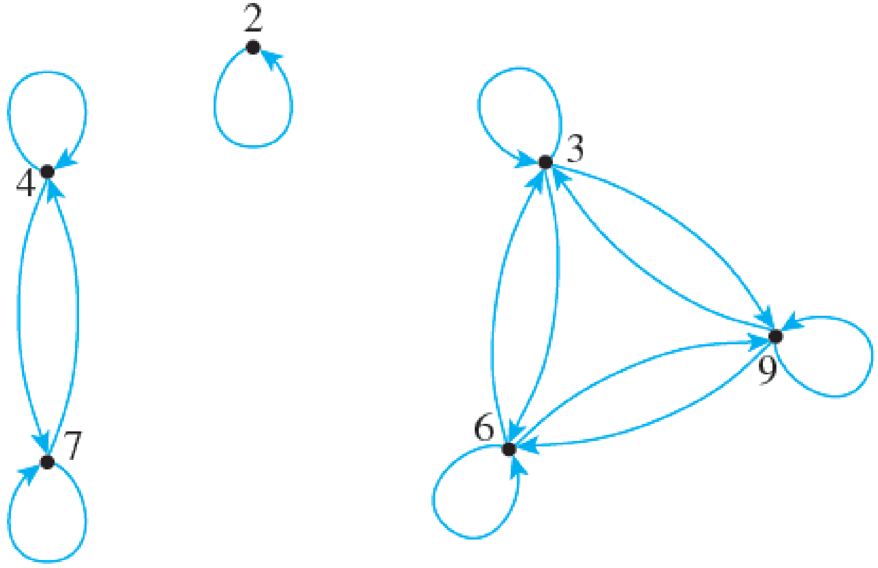
R	2	3	4	6	7	9
2	X					
3		X		X		X
4			X		X	
6		X		X		X
7			X		X	
9		X		X		X

Representación como grafo dirigido



Reflexividad, Simetría y Transitividad

Análisis del grafo



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este grafo cumple tres propiedades importantes:

1. Cada punto del grafo tiene una flecha que gira alrededor de él y regresa a él.
2. En cada caso donde hay una flecha que va de un punto a otro, hay una flecha que va del segundo punto de regreso al primero.
3. En cada caso donde hay una flecha que va de un punto a otro y del segundo a un tercero, hay una flecha que va del primero al tercero. Es decir, no hay "triángulos dirigidos incompletos" en el grafo.

Reflexividad, Simetría y Transitividad

Resumen propiedades

Recordemos las propiedades reflexivas, simétricas y transitivas:

1. ***R* es reflexiva**: Cada elemento está relacionado consigo mismo.

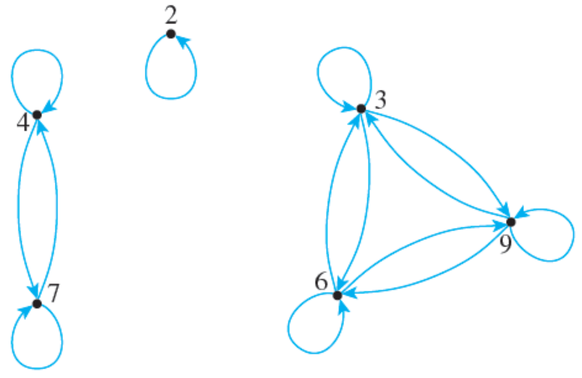
$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

2. ***R* es simétrica**: Si cualquier elemento está relacionado con cualquier otro elemento entonces, el segundo elemento está relacionado con el primero

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \Longrightarrow (y, x) \in R$$

3. ***R* es transitiva**: Si cualquier elemento está relacionado con el segundo y el segundo elemento está relacionado con el tercero entonces, el primer elemento está relacionado con el tercero.

$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \land (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$$



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- Reflexividad, Simetría y Transitividad
- **Relación antisimétrica**
- Relaciones de orden
- Representación de las relaciones de orden

Relación antisimétrica

Definición Relación antisimétrica

En términos de un dígrafo, una relación es **antisimétrica** si **nunca hay flechas en ambos sentidos entre dos elementos distintos**. Es decir, si hay una flecha que va de un elemento x a otro elemento y, y $x \neq y$, entonces **no puede existir una flecha que regrese de y a x**. La única excepción es cuando ambos elementos son iguales $(x = y)$.

Formalmente, la relación R sobre un conjunto A **es antisimétrica** si:

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$$

Tomando la negación de la definición, puede ver que una relación R **no es antisimétrica** si y sólo si,

$$\exists x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \wedge x \neq y$$

Según la expresión anterior, si existe al menor un caso en el que hay flechas en ambos sentidos entre elementos distintos R **no es antisimétrica**.

Relación antisimétrica

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

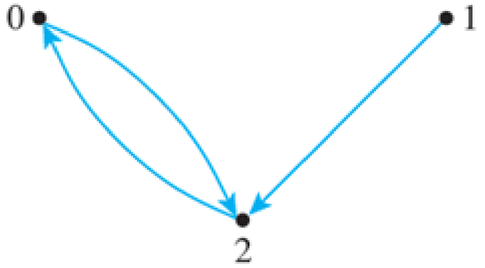
Ejemplo

Ejemplo 1: Sean R_1 y R_2 las relaciones sobre $\{0,1,2\}$ que se definen como sigue:

- $R_1 = \{(0,2), (1,2), (2,0)\}$
- $R_2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\}$

Represente cada grafo y determine si la relación es o no antisimétrica:

Relación R_1 no es antisimétrica

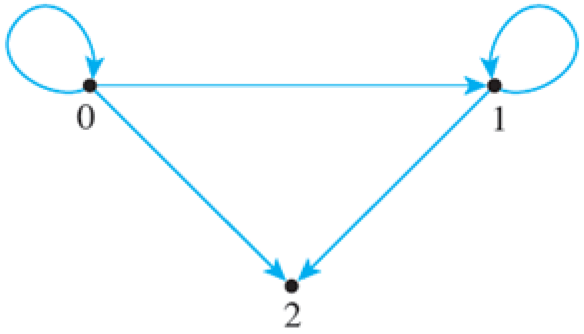


$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \{(0,2), (1,2), (2,0)\}$$

Puesto que $0\ R_1\ 2$ y $2\ R_1\ 0$ pero $0 \neq 2$, R_1 **no es antisimétrica**.

Relación R_2 es antisimetrica



$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,2)\}$$

Para que R_2 **no sea antisimétrica**, tendrían que existir un par de elementos distintos de A tal que cada uno está relacionado con el otro por R_2. Pero se puede ver por inspección que no existe ningún tal par.

Agenda

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- Reflexividad, Simetría y Transitividad
- Relación antisimétrica
- **Relaciones de orden**
- Representación de las relaciones de orden
- Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Relaciones de orden

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Definición

Una relación de orden es una relación binaria que organiza los elementos de un conjunto de forma estructurada. Existen dos tipos principales:

1. Relación Orden parcial
2. Relación de Orden total

Relaciones de orden

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Relación de orden parcial

Una relación $R \subseteq A \times A$ es de orden parcial si cumple las propiedades:

- **Reflexiva**: todo elemento del conjunto está relacionado consigo mismo.

$$\forall x \in A, (x, x) \in R$$

- **Antisimétrica**: Si dos elementos están relacionados en ambos sentidos, entonces deben ser iguales.

$$\forall x, y \in A, (x, y) \in R \wedge (y, x) \in R \Longrightarrow x = y$$

- **Transitiva**: Si x está relacionado con y y y con z, entonces x también está relacionado con z.

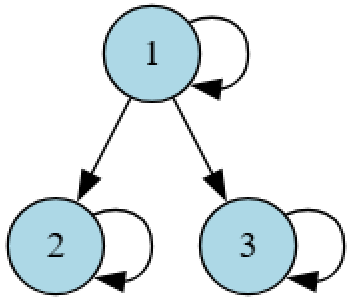
$$\forall x, y, z \in A, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in R \Longrightarrow (x, z) \in R$$

Relaciones de orden

Relación de orden parcial

Ejemplo 1: Sea $A = \{1,2,3\}$ determine si la relación $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3)\}$ es una relación de orden:

$$R_1 = \left\{\begin{matrix}(1,1),(2,2),(3,3),\\ (1,2),(1,3)\end{matrix}\right\}$$



$$M_{R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexividad: $\forall x \in A, (x,x) \in R$

- $x = 1$: $(1,1) \in R_1$
- $x = 2$: $(2,2) \in R_1$
- $x = 3$: $(3,3) \in R_1$

Antisimétrica: $\forall x,y \in A, (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Longrightarrow x = y$

- $(1,2) \in R_1$, pero $(2,1) \notin R_1$
- $(1,3) \in R_1$, pero $(3,1) \notin R_1$

Como no existen pares (x,y) y (y,x) en R donde $x \neq y$. La relación **es antisimétrica.**

Transitividad: $\forall x,y,z \in A, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$

- $(1,2) \in R_1, (2,2) \in R_1 \to (1,2) \in R_1$
- $(1,3) \in R_1, (3,3) \in R_1 \to (1,3) \in R_1$

Conclusión: Como la relación R_1 cumple con las tres propiedades (es reflexiva, antisimétrica y transitiva), podemos afirmar que la relación R_1 es una relación de orden sobre el conjunto A.

Relaciones de orden

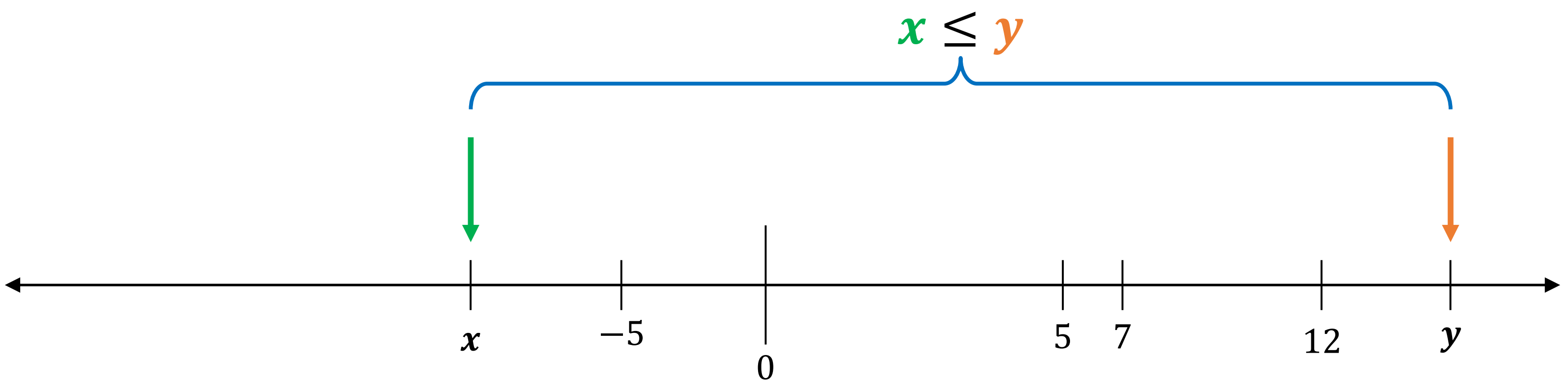
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación de orden total

Contextualización: Suponga que esta trabajando con el conjunto de números esteros y toma dos números enteros dos números cualquiera para hacer una comparación, por ejemplo:

- 7 y el 12, siempre es posible decir cual es menor o igual, lo cual se puede expresar como $7 \leq 12$.
- 5 y el 5, lo cual es implica decir que $5 \leq 5$.

Teniendo en cuenta lo anterior, no hay ningún par de números que no puedan ser comparados. Esta propiedad de **poder comparar siempre todo con todo** es la idea central de una relación de **orden total**.



Relaciones de orden

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación de orden total

Una relación de orden total es una relación de orden parcial en la que **todo par** de elementos es comparable.

Formalmente, Sea R un orden parcial sobre un conjunto A. Si para todo par de elementos $(x, y) \in \mathrm{A}$, se cumple que $x\ R\ y$ y $y\ R\ x$, entonces decimos que los elementos x y y son **comparables**, y la relación R es una relación de orden total sobre A.

La notación habitual para relaciones de orden incluye símbolos como $x \leq y$ o $x \preccurlyeq y$. En este contexto, el par (A, R), donde para el caso será $(A, \leq)$ o $(A, \preccurlyeq)$ según el símbolo utilizado.

Las propiedades que caracterizan a una relación de orden (parcial o total) son:

- **Reflexiva**: $x \leq x$
- **Antisimétrica**: $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$
- **Transitiva**: $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Relaciones de orden

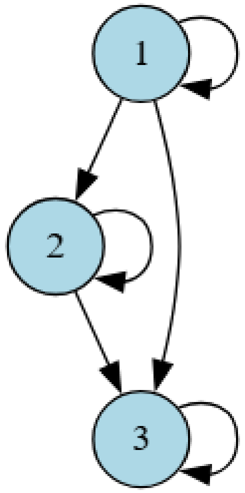
Relación de orden parcial

Ejemplo 2: Sea $A = \{1,2,3\}$ determine si $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$ es una relación de orden total.

Solución: La determinación de orden total se hace en dos partes.

Parte 1 - Verificación de la relación de orden

$$R_2 = \left\{ \begin{matrix} (1,1), \color{red}{(1,2)}, \color{green}{(1,3)}, \\ (2,2), \color{blue}{(2,3)}, (3,3) \end{matrix} \right\}$$



$$M_{R_2} = \begin{bmatrix} 1 & \color{red}{1} & \color{green}{1} \\ 0 & 1 & \color{blue}{1} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexividad: $\forall x \in A, (x,x) \in R$

- $x = 1$: $(1,1) \in R_2$
- $x = 2$: $(2,2) \in R_2$
- $x = 3$: $(3,3) \in R_2$

Antisimétrica: $\forall x, y \in A, (x,y) \in R \wedge (y,x) \in R \Longrightarrow x = y$

- $(1,2) \in R_2$, pero $(2,1) \notin R_2$
- $(1,3) \in R_2$, pero $(3,1) \notin R_2$
- $(2,3) \in R_2$, pero $(3,2) \notin R_2$

Como no existen pares (x,y) y (y,x) en R_2 donde $x \neq y$. La relación **es antisimétrica**.

Transitividad: $\forall x, y, z \in A, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Longrightarrow (x,z) \in R$

- $(1,2) \in R_2, (2,3) \in R_2 \rightarrow (2,3) \in R_2$
- $(1,2) \in R_2, (2,2) \in R_2 \rightarrow (1,2) \in R_2$
- $(1,3) \in R_2, (3,3) \in R_2 \rightarrow (1,3) \in R_2$

Relaciones de orden

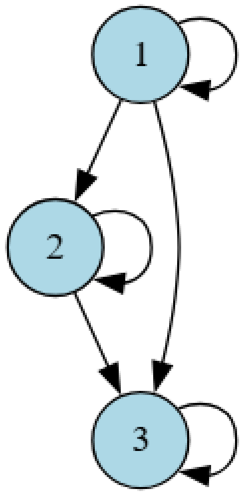
Relación de orden parcial

Conclusión 1: Dado que la relación R_2 cumple con las tres propiedades (es reflexiva, antisimétrica y transitiva), podemos afirmar que la relación R_2 es una relación de **orden** sobre el conjunto A.

Parte 2 - Verificación de la Propiedad de Comparabilidad (Totalidad)

$$R = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), \\ (2,2), (2,3), (3,3) \end{Bmatrix}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Comparabilidad total: $x \leq y \lor y \leq x$

- Par $\{1,2\}$ es comparable: Si pues $(1,2) \in R_2$
- Par $\{1,3\}$ es comparable: Si pues $(1,3) \in R_2$
- Par $\{2,3\}$ es comparable: Si pues $(2,3) \in R_2$

Conclusión 2: Como todos los pares de elementos distintos del conjunto A son comparables, la relación R_2 cumple la propiedad de totalidad.

Conclusión: Dado que la relación R_2 es una relación de orden parcial (es reflexiva, antisimétrica y transitiva) y además cumple con la propiedad de totalidad (todos los elementos son comparables), podemos concluir que R_2 es una relación de orden total. Mas exactamente R_2 es la relación "**menor o igual que**“ $(\leq)$ sobre el conjunto $A = \{1,2,3\}$, o sea:$(A, R_2) \to (A, \leq)$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

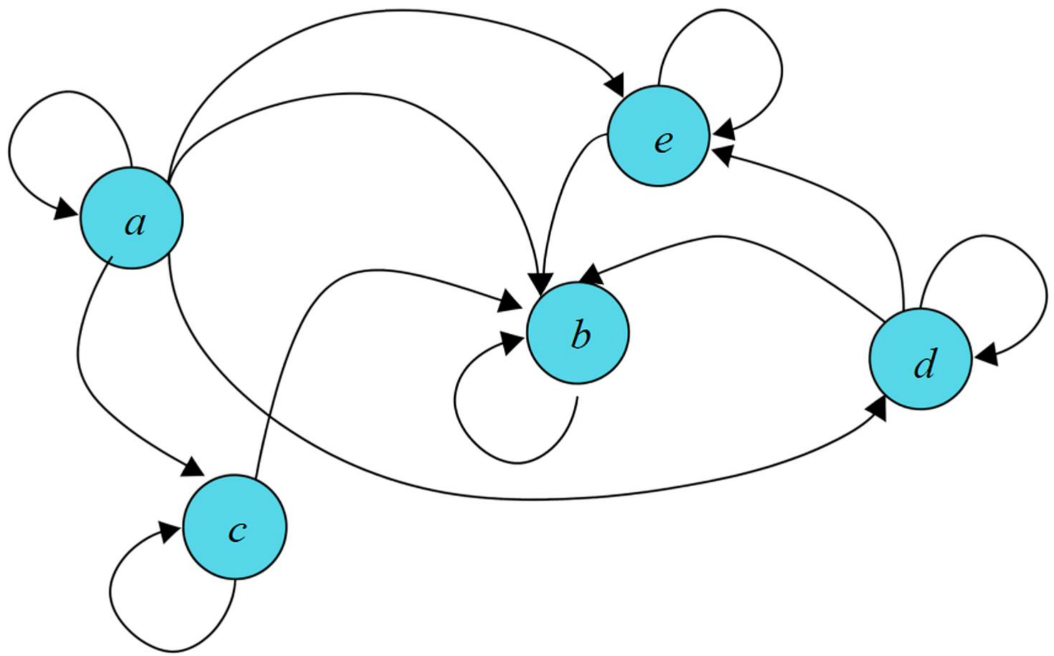
- Repaso clase anterior
- Reflexividad, Simetría y Transitividad
- Relación antisimétrica
- Relaciones de orden
- **Representación de las relaciones de orden**
- Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

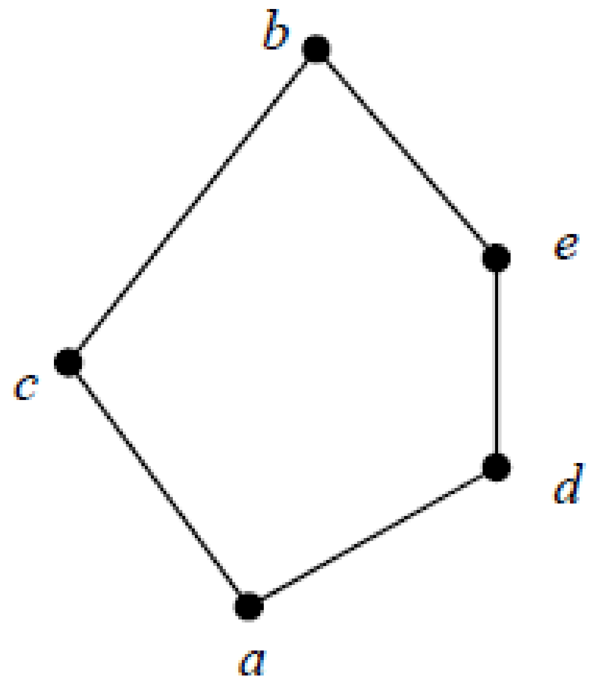
Representación de las relaciones de orden

Contextualización

De las diferentes formas de representación de una relación vamos a hacer énfasis en:

- Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)
- Representación usando diagramas de Hasse.





Representación de las relaciones

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

Un grafo se define formalmente como un par ordenado:

$$G = (V, E)$$

Donde:

- V es el **conjunto de vértices** (o nodos).
- E es el **conjunto de aristas** (o enlaces).

Los grafos pueden ser dirigidos o no dirigidos dependiendo de la naturaleza de E tal y como se muestra a continuación:

- **Grafo no dirigido**: $V = \{1,2,3\}, E = \{\{1,2\}, \{2,3\}\}$
- **Grafo dirigido**: $V = \{1,2,3\}, E = \{(1,2), (2,3)\}$

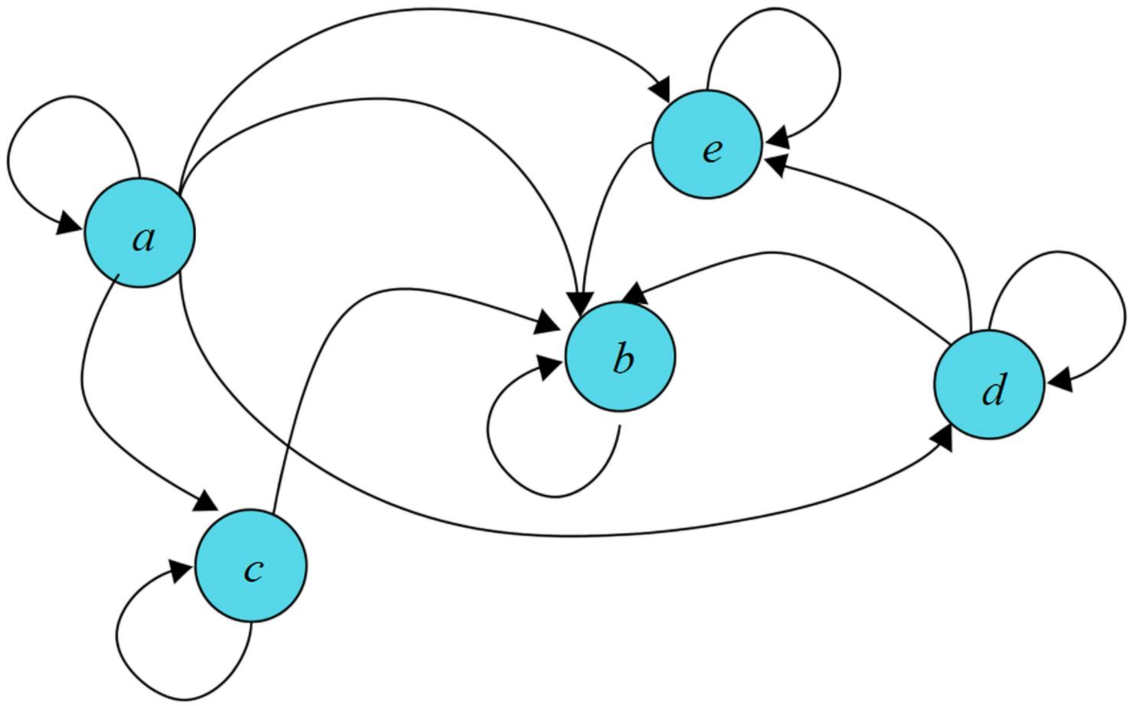
Las relaciones de orden se representan por medio de grafos dirigidos.

Representación de las relaciones

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

Ejemplo 1: Dados los siguientes vértices y aristas, grafique el dígrafo asociado:

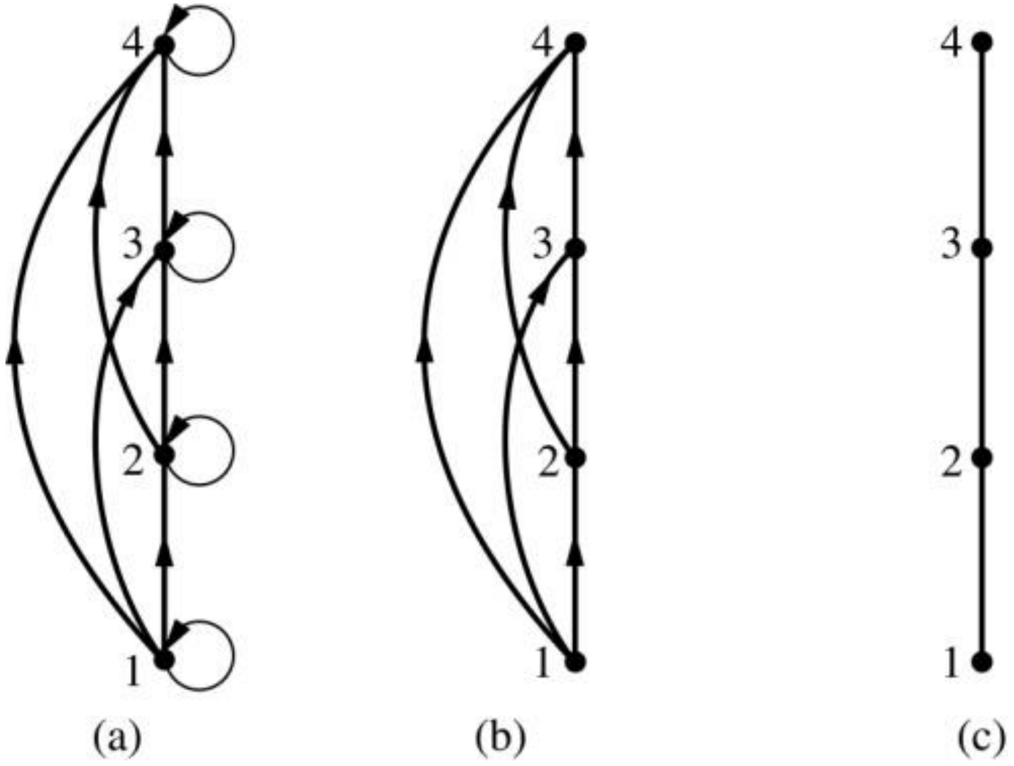
- $V = \{a, b, c, d, e\}$
- $E = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (c, b), (a, d), (a, e), (e, b), (a, b), (d, b), (d, e)\}$



Representación de las relaciones

Diagrama de Hasse

Un diagrama de Hasse es una forma gráfica de representar relaciones de orden parcial $(S, \preccurlyeq)$, de manera simplificada y estructurada, eliminando la redundancia visual de reflexividad y transitividad.



Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Diagrama de Hasse

Para construir un diagrama de Hasse a partir de un grafo dirigido, siga estos pasos:

1. **Eliminar los bucles**: Elimine los bucles (x, x) presentes en cada vértice ya que representan la **reflexividad**, que se da por supuesta..
2. **Eliminar las aristas transitivas**: Elimine todas las aristas (x, y) para las que exista un elemento $z \in S$ tal que $x \prec z \prec y$.
3. **Organizar verticalmente**: dibuje cada arista de modo que su vértice inicial quede debajo del vértice terminal. Finalmente, elimine las flechas, ya que en un diagrama de Hasse todas las aristas se entienden como orientadas hacia arriba.

Grafo dirigido (Digrafo)

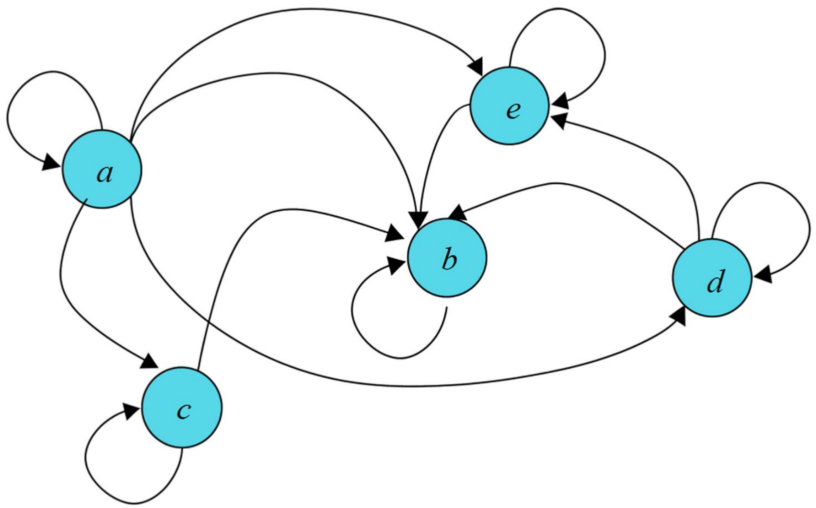
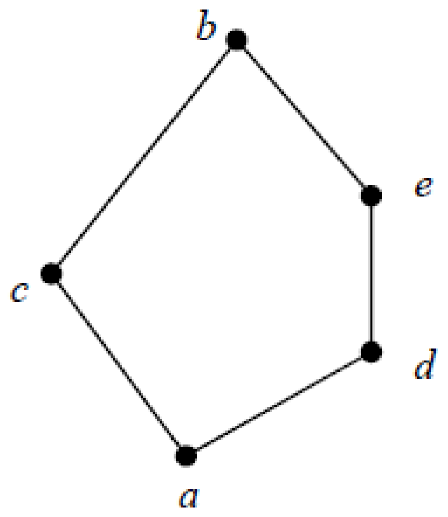


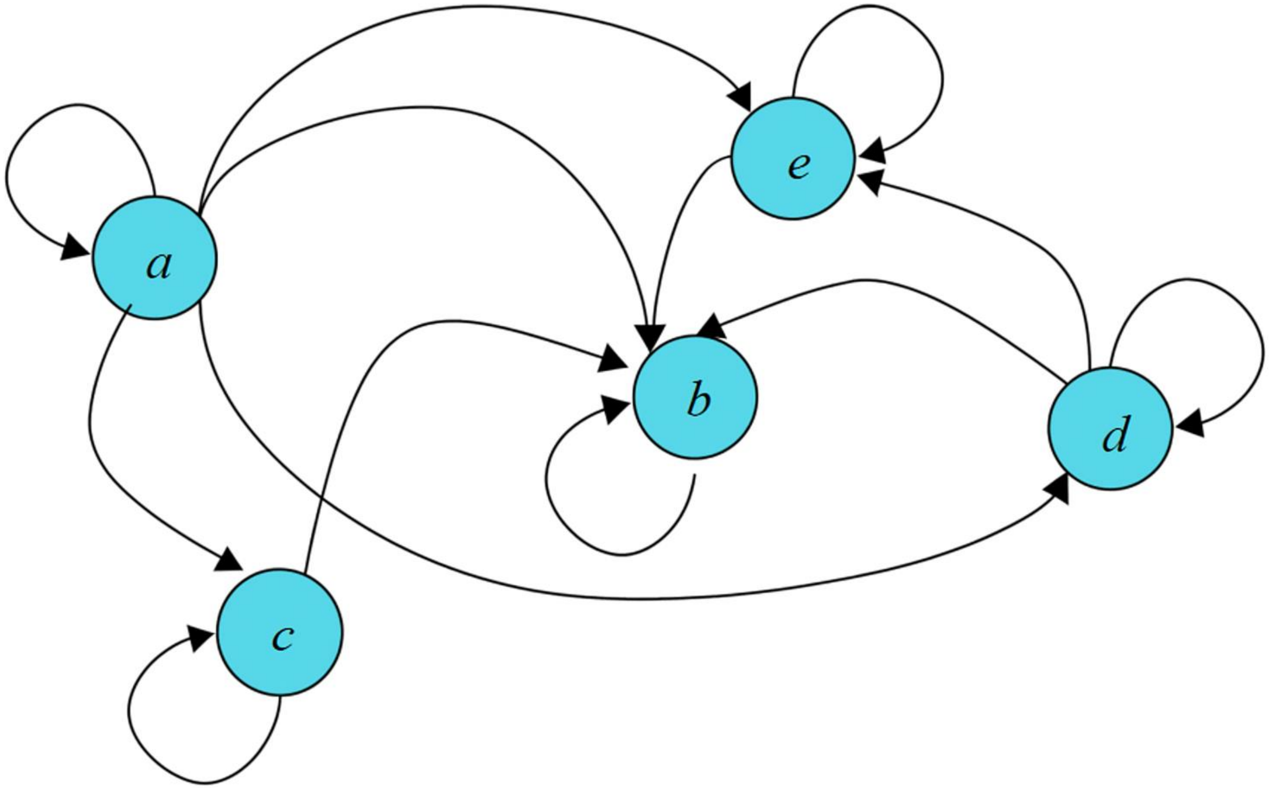
Diagrama de Hasse



Representación de las relaciones

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

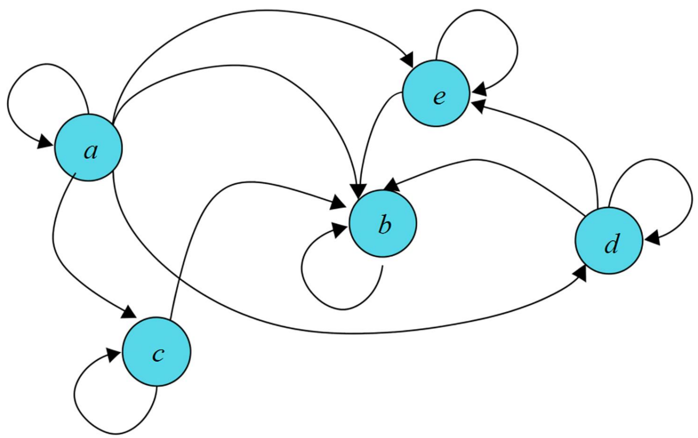
Ejemplo 2: Aplique los pasos previamente descritos para obtener a partir del grafo mostrado a continuación el dirigido el diagrama de Hasse.



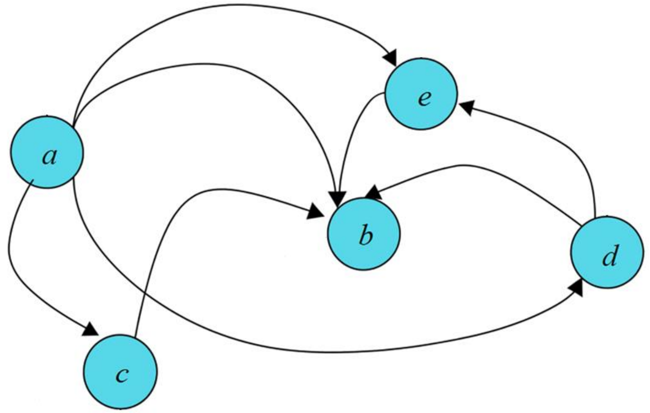
Representación de las relaciones

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

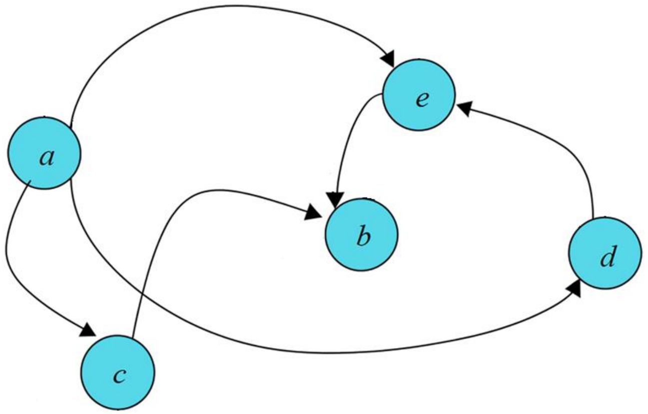
Representación inicial [Digrafo]



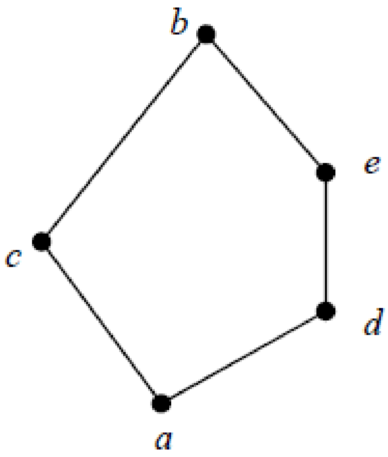
Paso 1 - Eliminación de lazos



Paso 2 - Eliminación de aristas transitivas



Paso 3 - Organización vertical [Diagrama de Hasse]



Representación de las relaciones

Diagrama de Hasse

Ejemplo 3: Sean el conjunto $A = \{1,2,3,4,12\}$ y R un orden parcial sobre el conjunto A definido como:

$$R = \{(a,b) \in A \mid a|b\}$$

Esto es, si $a \in A \wedge b \in A, a \preccurlyeq b$, si y solo si $a|b$.

Obtenga:

1. La representación en pares ordenados de $(A, \preccurlyeq)$
2. La representación como dígrafo de $(A, \preccurlyeq)$
3. El diagrama de Hasse de $(A, \preccurlyeq)$

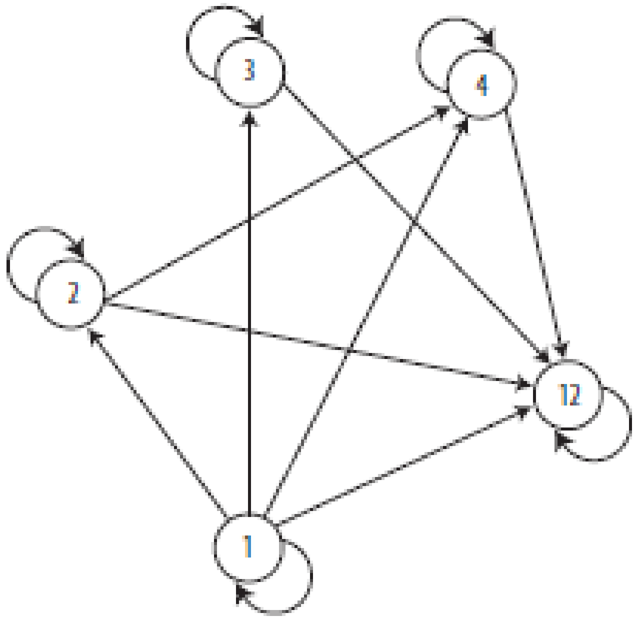
Representación de las relaciones

Diagrama de Hasse

Ejemplo 2 - Solución: Sean el conjunto $A = \{1,2,3,4,12\}$ tenemos que R esta dado por:

$$R = (A, \preccurlyeq) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,12),(2,2),(2,4),(2,12),(3,3),(3,12),(4,4),(4,12),(12,12)\}$$

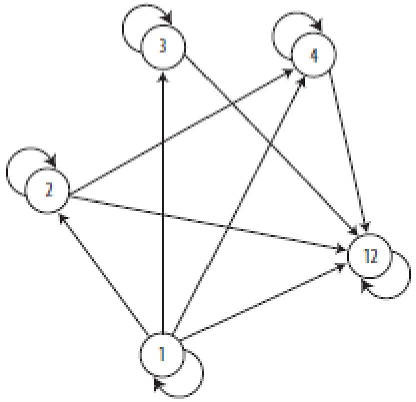
Luego, el dígrafo asociado se muestra a continuación:



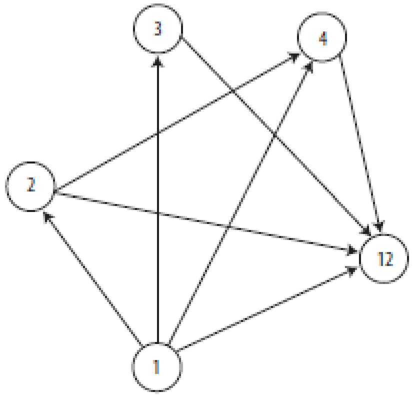
Representación de las relaciones

Diagrama de Hasse

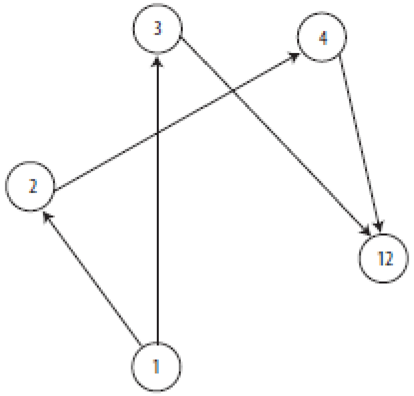
Ejemplo 2 - Solución: Ahora, a partir del dígrafo se muestra el procedimiento paso a paso para llegar al diagrama de Hasse:



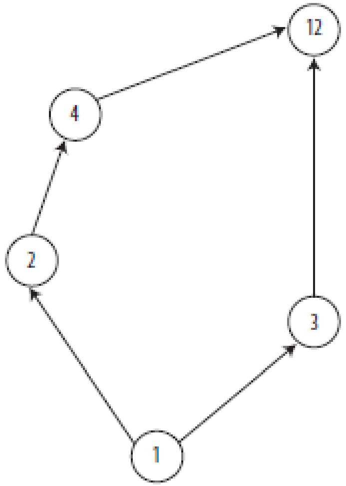
Representación del orden parcial como dígrafo



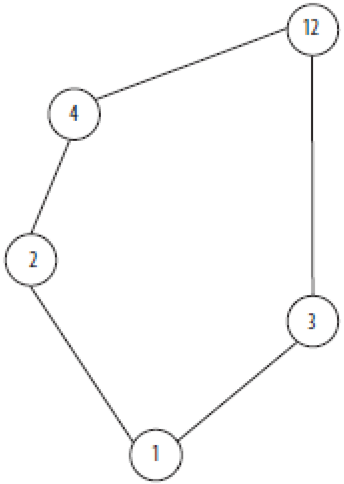
Eliminación de lazos



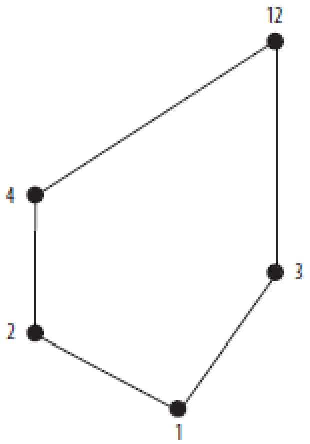
Eliminación de los elementos transitivos.



Redibujando el grafo para
que las aristas apunten hacia arriba.



Eliminación de flechas.



Reemplazo de círculos por puntos

Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Resumen comparativo – Relaciones de orden

Característica	Relación de Orden Parcial	Relación de Orden Total
Definición	Una relación que es reflexiva, antisimétrica y transitiva.	Un orden parcial que además cumple la propiedad de totalidad (todo es comparable).
Propiedades	1. Reflexividad 2. Antisimetría 3. Transitividad	1. Reflexividad 2. Antisimetría 3. Transitividad 4. Totalidad (o Conexidad)
Comparabilidad	No se exige que todo par de elementos sea comparable entre sí. Pueden existir elementos "incomparables".	Se exige que absolutamente todo par de elementos sea comparable. Para cualquier x, y, o $x \leq y$ o $y \leq x$.
Ejemplo clásico	La relación **"es subconjunto de"** ($\subseteq$) sobre conjuntos.	La relación **"menor o igual que"** ($\leq$) sobre los números reales
Diagrama de Hasse	Puede tener una estructura compleja con múltiples ramas y elementos en el mismo nivel.	Es siempre una **cadena vertical simple**, sin ninguna ramificación.
Analogía	Las dependencias entre tareas de un proyecto (algunas tareas pueden hacerse en paralelo, son incomparables en orden).	Las palabras en un diccionario (siempre se puede decir qué palabra va antes).

Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

Ejemplo 4: Sea el conjunto $A = \{1,2,3\}$ y las relaciones de orden previamente analizadas:

- **Relación de orden parcial**: $R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3)\}$
- **Relación de orden total**: $R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

Obtenga el diagrama de Hasse para cada caso y compare.

$R_1 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(1,3)\}$

Digrafo

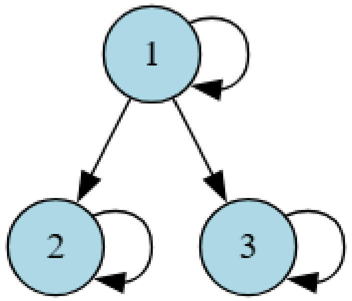
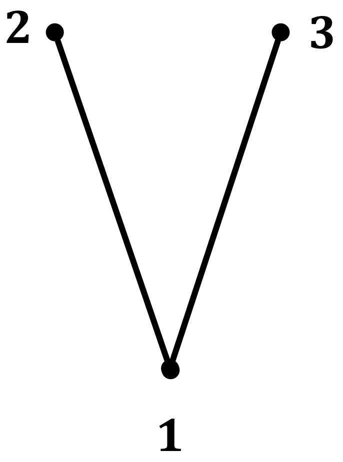


Diagrama de Hasse



$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$

Digrafo

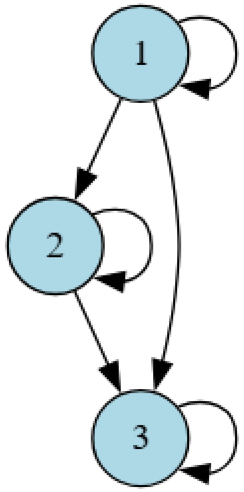
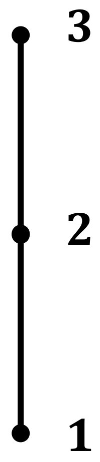


Diagrama de Hasse



Representación de las relaciones

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

Ejemplo 5: Obtenga el diagrama de Hasse para la relación “Subconjunto” ($\subseteq$) sobre el conjunto $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$. Es decir, para todos los subconjuntos U y V en $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$

$$U \subseteq V \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, \qquad x \in U \ \rightarrow x \in V$$

Solución: Inicialmente obtengamos el $\mathcal{P}(\{a,b,c\})$ el cual tiene $|\mathcal{P}(\{a,b,c\})| = 2^3 = 8$ elementos tal y como se muestra a continuación:

$$\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \left\{ \begin{matrix} \emptyset, \\ \{a\},\{b\},\{b\}, \\ \{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}, \\ \{a,b,c\} \end{matrix} \right\}$$

Ahora procedamos a realizar tabla de adyacencia:

Representación de las relaciones

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

Inicialmente obtengamos la tabla y la matriz de adyacencia de la relación R en el conjunto para cada uno de lo elementos de:

$$\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}\}$$

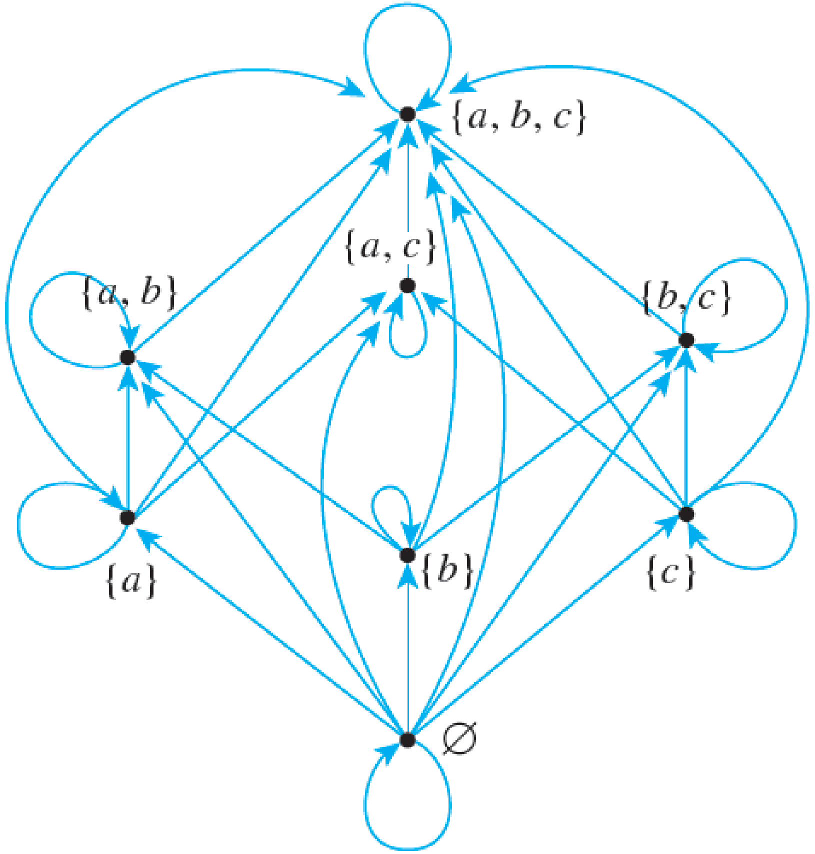
$R = U \subseteq V$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\emptyset$	x	x	x	x	x	x	x	x
$\{a\}$		x			x		x	x
$\{b\}$			x		x	x		x
$\{c\}$				x		x	x	x
$\{a,b\}$					x			x
$\{b,c\}$						x		x
$\{a,c\}$							x	x
$\{a,b,c\}$								x

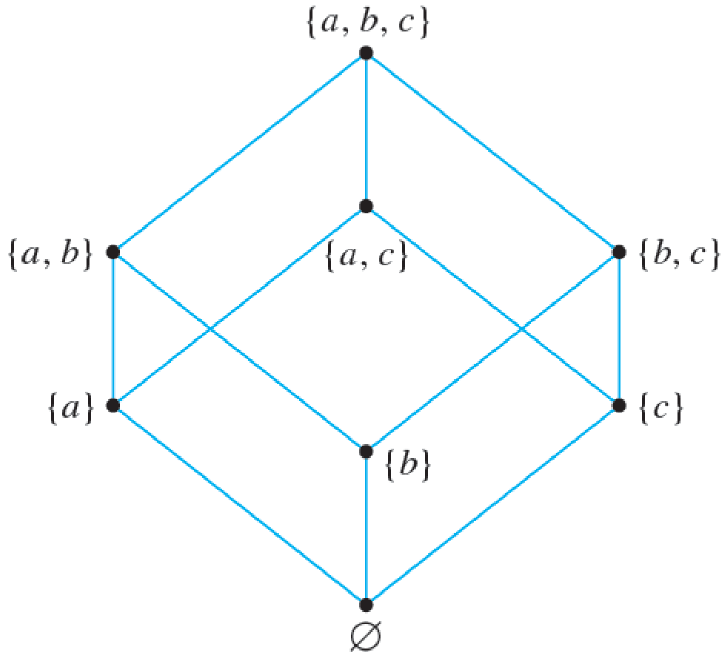
$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Representación de las relaciones

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

A continuación se muestran las representaciones como dígrafo y como diagrama de Hasse para la relación R.

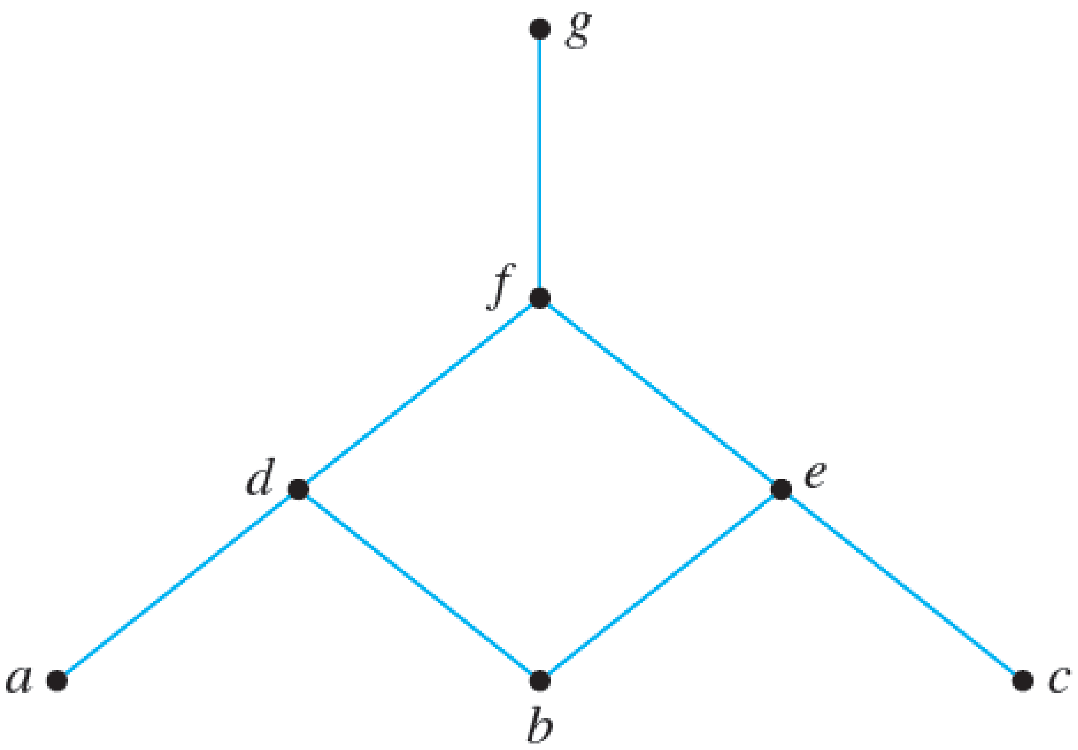




Representación de las relaciones

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

Ejemplo 6: Una relación de orden parcial R tiene el siguiente diagrama de Hasse. Determine el grafo dirigido de R.



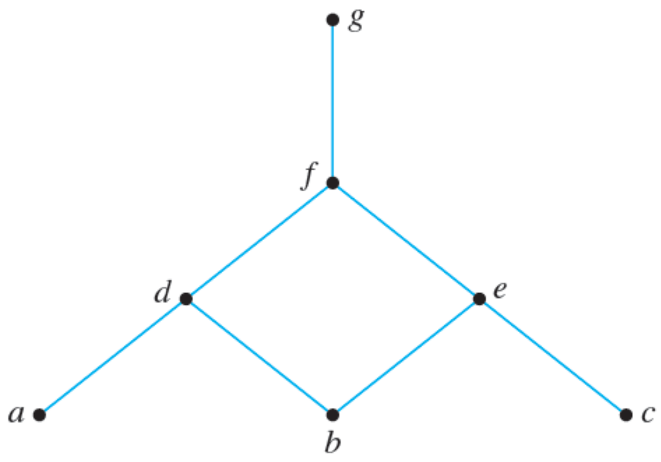
Representación de las relaciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

Solución: A partir del diagrama de Hasse obtengamos tabla y la matriz de adyacencia teniendo en cuenta las tres propiedades que deben ser cumplidas por la relación de orden parcial R:

1. Reflexividad
2. Antisimetría
3. Transitividad



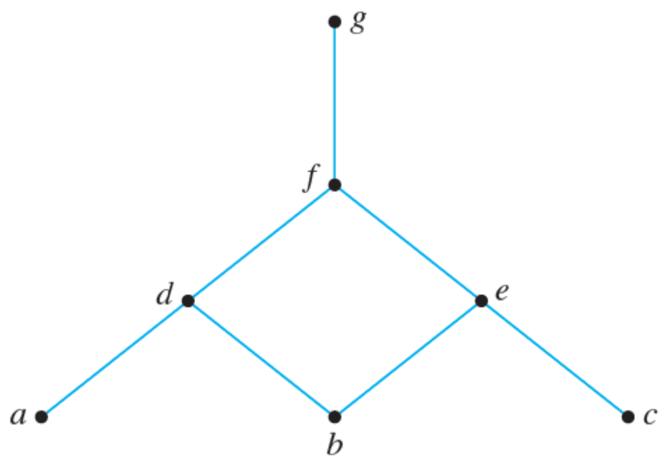
R	a	b	c	d	e	f	g
a	X			X		X	X
b		X		X	X	X	X
c			X		X	X	X
d				X		X	X
e					X	X	X
f						X	X
g							X

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

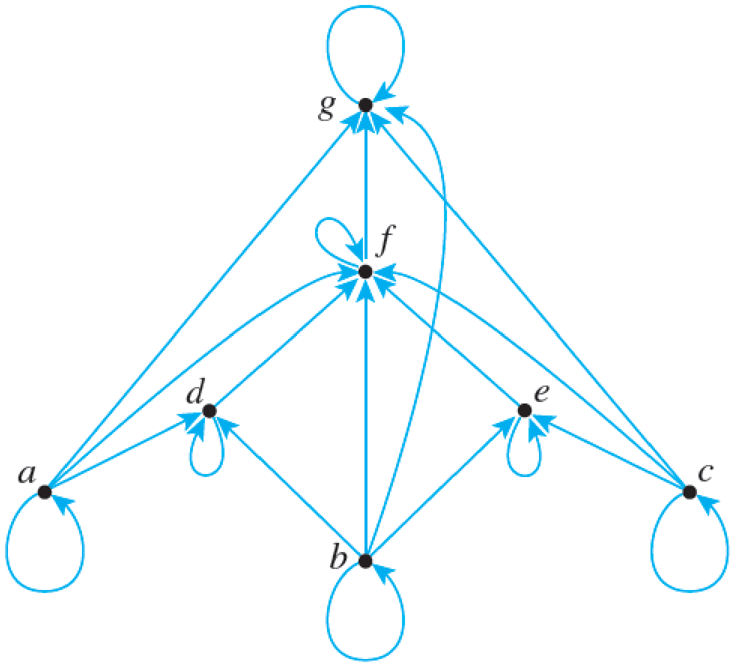
Representación de las relaciones

Representación usando dígrafos (grafos dirigidos)

Solución: A partir del diagrama de Hasse obtengamos tabla y la matriz de adyacencia teniendo en cuenta las tres propiedades que deben ser cumplidas por la relación de orden parcial R:



$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- **Reflexividad, Simetría y Transitividad**
- Relación antisimétrica
- Relaciones de orden
- Representación de las relaciones de orden
- Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Elemento maximal y minimal

Sea A un conjunto parcialmente ordenado por medio de una relación de orden cualquiera $\preccurlyeq$, es decir, $(A, \preccurlyeq)$ Los siguientes son clases de elementos que pueden determinarse en una relación de orden parcial.

- **Elemento maximal**: es aquel que no tiene ningún otro elemento estrictamente mayor. Puede haber varios. Formalmente, sean a y x elementos de A:

$$a \text{ es maximal de } A \text{ sii } \forall x(a \leq x \rightarrow a = x)$$

- **Elemento minimal:** es aquel que no tiene ningún elemento estrictamente menor que él. Puede haber varios. Desde el punto de vista formal, sean b y x elementos de A:

$$b \text{ es minimal de } A \text{ sii } \forall x(x \leq b \rightarrow b = x)$$

Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Elemento máximo y mínimo

Sea A un conjunto parcialmente ordenado por medio de una relación de orden cualquiera $\preccurlyeq$, es decir, $(A, \preccurlyeq)$ Los siguientes son clases de elementos que pueden determinarse en una relación de orden parcial.

- **Elemento máximo**: es un elemento que está por encima de todos los demás. Solo puede haber uno. Formalmente, sean a y x elementos de A:

$$a \text{ es maximo de } A \text{ sii } \forall x(x \leq a)$$

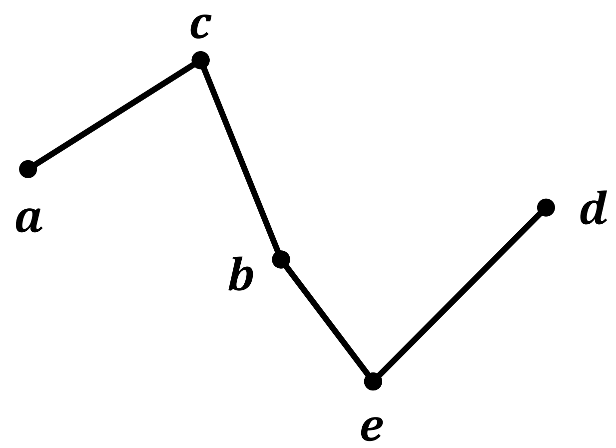
- **Elemento mínimo**: es un elemento que está debajo de todos los demás. Solo puede haber uno. Desde el punto de vista formal, sean b y x elementos de A:

$$b \text{ es minimo de } A \text{ sii } \forall x(b \leq x)$$

Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Ejemplo

Sea que $B = \{a, b, c, d, e\}$ tenga el ordenamiento parcial $\preccurlyeq$ definido por el siguiente diagrama de Hasse. Determine todos los elementos extremos allí ubicados:



La relación de orden $(B, \preccurlyeq)$:

$$\preccurlyeq = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(a,c),(b,c),(e,b),(e,c),(e,d)\}$$

A continuación se definen los extremos:

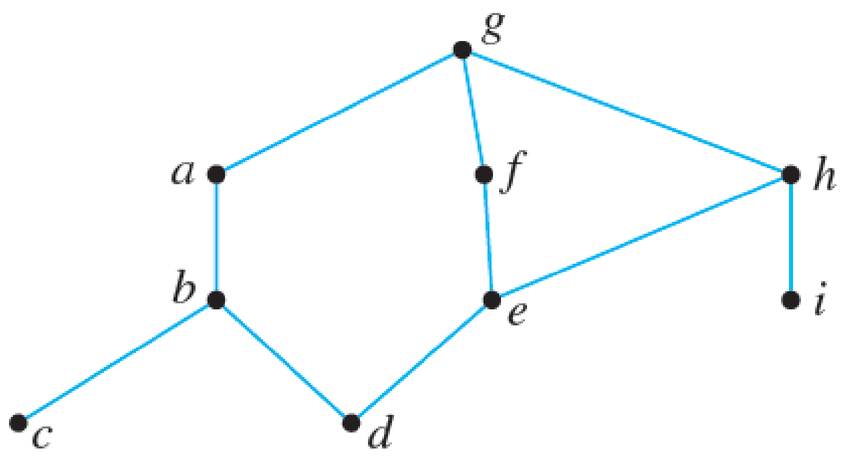
- **Maximales:** $\{c, d\}$
- **Minimales:** $\{a, e\}$
- **Maximo:** $\{\quad\}$
- **Minimo:** $\{\quad\}$

Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo

Sea que $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ tenga el ordenamiento parcial $\preccurlyeq$ definido por el siguiente diagrama de Hasse. Determine todos los elementos extremos allí ubicados:



La relación de orden $(A, \preccurlyeq)$:

$$\preccurlyeq\, = \left\{ \begin{array}{c} (a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(f,f),(g,g),(h,h),(i,i), \\ (c,b),(c,a),(c,g), \\ (d,b),(d,a),(d,g),(d,e),(d,f) \\ (b,a),(b,g), \\ (e,f),(e,g),(e,h), \\ (i,h),(i,g), \\ (a,g),(f,g),(h,h) \end{array} \right\}$$

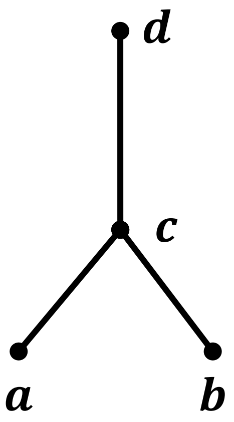
A continuación se definen los extremos:

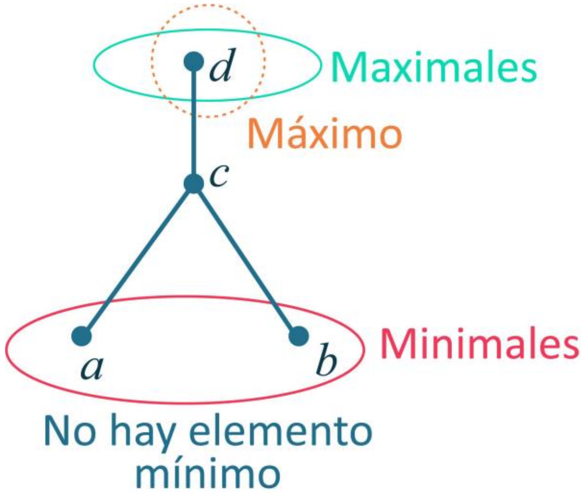
- **Maximales:** $\{g\}$
- **Minimales:** $\{c, d, i\}$
- **Maximo:** $\{g\}$
- **Minimo:** $\{\quad\}$

Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Ejemplo

Sea que $A = \{a, b, c, d\}$ tenga el ordenamiento parcial $\preccurlyeq$ definido por el siguiente diagrama de Hasse. Determine todos los elementos extremos allí ubicados:





La relación de orden $(A, \preccurlyeq)$:

$\preccurlyeq = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d)(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$

A continuación se definen los extremos:

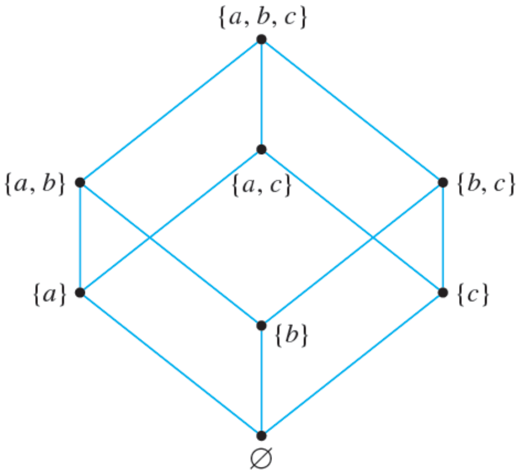
- **Maximales de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $\{d\}$
- **Minimales de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $\{a, b\}$
- **Maximo de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $\{d\}$
- **Minimo de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $\{\quad\}$

Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo

Retome el diagrama de Hasse asociado al conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ teniendo en cuenta que $A = \{a, b, c\}$ y determine todos los elementos extremos allí ubicados



La relación de orden $(A, \subseteq)$:

$$\subseteq = \left\{ \begin{array}{c} (\emptyset,\emptyset),(\{a\},\{a\}),(\{b\},\{b\}),(\{c\},\{c\}),(\{a,b\},\{a,b\}),(\{a,c\},\{a,c\}),(\{b,c\},\{b,c\}),(\{a,b,c\},\{a,b,c\}), \\ (\emptyset,\{a\}),(\emptyset,\{b\}),(\emptyset,\{c\}),(\emptyset,\{a,b\}),(\emptyset,\{a,c\}),(\emptyset,\{b,c\}),(\emptyset,\{a,b,c\}), \\ (\{a\},\{a,b\}),(\{a\},\{a,c\}),(\{a\},\{a,b,c\}), \\ (\{b\},\{a,b\}),(\{b\},\{b,c\}),(\{b\},\{a,b,c\}), \\ (\{c\},\{a,c\}),(\{c\},\{b,c\}),(\{c\},\{a,b,c\}), \\ (\{a,c\},\{a,b,c\}),(\{a,b\},\{a,b,c\}),(\{b,c\},\{a,b,c\}) \end{array} \right\}$$

A continuación se definen los extremos:

- **Maximales de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $\{A\} = \{\{a, b, c\}\}$
- **Minimales de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $\{\emptyset\} = \{\{\quad\}\}$
- **Maximo de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $A = \{a, b, c\}$
- **Minimo de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $\emptyset$

Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Cotas

Dado un subconjunto $B \subseteq A$ de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preccurlyeq)$, tenemos:

- **Cota superior**: Un elemento a de A es cota superior de B sii:

$$\forall x(x \in B \rightarrow x \leq a)$$

  Es decir, a es mayor o igual a todos los elementos de B.

- **Cota inferior:** Un elemento b de A es cota inferior de B sii:

$$\forall x(x \in B \rightarrow b \leq x)$$

  Es decir, b está relacionado (menor o igual) con todos los elementos de B.

Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Cotas

Dado un subconjunto $B \subseteq A$ de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preccurlyeq)$, tenemos:

- **Mínima cota superior (m.c.s) o supremo**: Es la menor de todas las cotas superiores posibles del subconjunto. Es decir, ninguna otra cota superior está por debajo de ella. Se denota como $\sup(A)$. Un elemento a^* de A es cota superior de B sii:

$$\forall x(a^* \leq x), \qquad \text{donde } a^* \text{ y } x \text{ son cotas superiores de } B$$

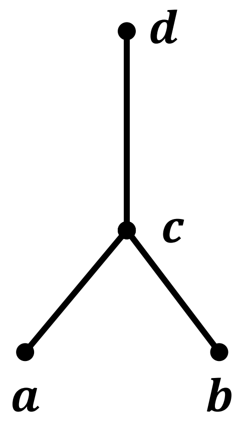
- **Máxima cota inferior (M.C.I) o ínfimo:** Es la mayor de todas las cotas inferiores posibles del subconjunto. Es decir, ninguna otra cota inferior está por encima de ella $\inf(A)$. Un elemento b^* de A es cota inferior de B sii:

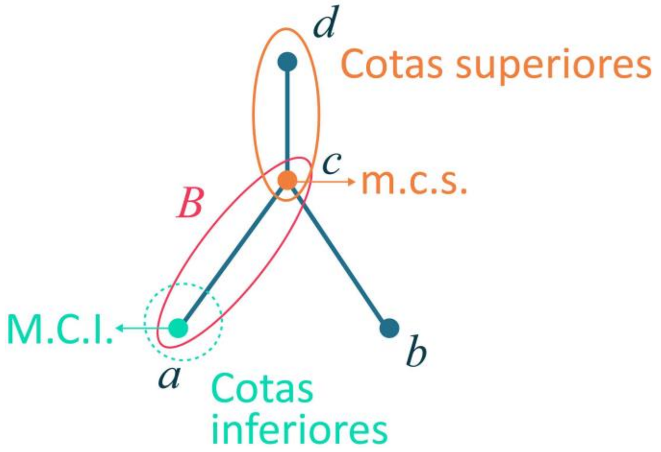
$$\forall x(x \leq b^*), \qquad \text{donde } b^* \text{ y } x \text{ son cotas superiores de } B$$

Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Ejemplo

Sea que $A = \{a, b, c, d\}$ y el conjunto $B = \{a, c\}$, tal que $B \subseteq A$. Determine las cotas superiores e inferiores:





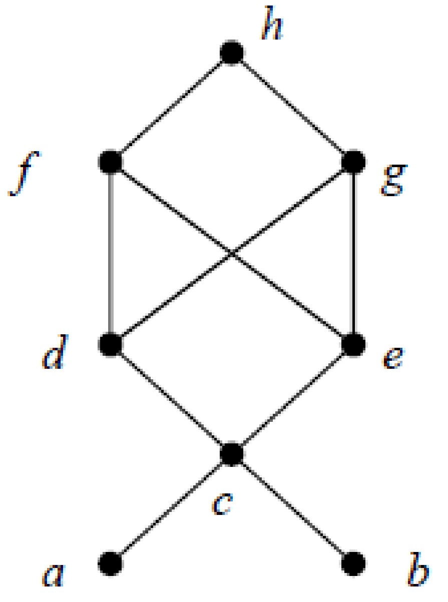
A continuación se definen los extremos:

- **Cotas superiores de B con respecto a R:** $\{c, d\}$
- **Cotas inferiores de B con respecto a R:** $\{a\}$
- **mcs de B con respecto a R:** $\{c\}$
- **MCI de B con respecto a R:** $\{a\}$

Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Ejemplo

Sea el conjunto parcialmente ordenado (A, R), y $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ cuyo diagrama de Hasse se muestra a continuación, hallar maximales, minimales, máximo y mínimo de A.



A continuación se definen los extremos:

- **Maximales de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $\{h\}$
- **Minimales de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $\{a, b\}$
- **Maximo de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** h
- **Minimo de $\boldsymbol{A}$ respecto a $\boldsymbol{R}$:** $\emptyset$

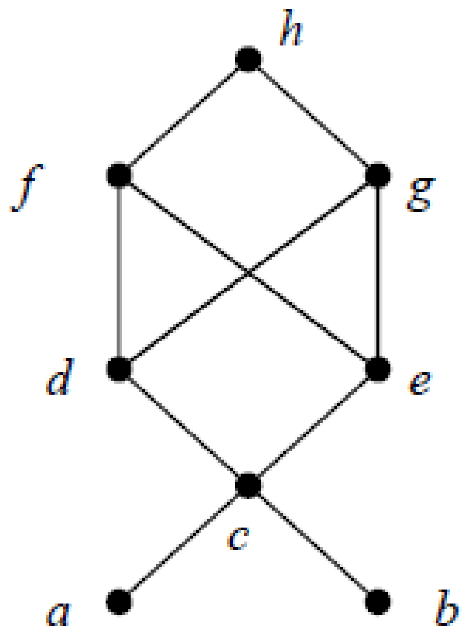
Elementos extremos de un conjunto parcialmente ordenado

Ejemplo

Sea el conjunto parcialmente ordenado (A, R), y $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ cuyo diagrama de Hasse se muestra a continuación. Hallar las cotas superiores es inferiores para los siguientes subconjuntos:

- $B_1 = \{a, b\}$
- $B_2 = \{c, d, e\}$

	$\boldsymbol{B_1 = \{a, b\}}$	$\boldsymbol{B_2 = \{c, d, e\}}$
Cotas superiores	$\{c, d, e, f, g, h\}$	$\{f, g, h\}$
Cotas inferiores	$\{\quad\}$	$\{a, b, c\}$
mcs	c	No posee
MCI	No posee	h



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Curso de Matemáticas Discretas 1

Clase 11 – Relaciones de orden