Curso
Matemáticas Discretas I

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Clase 2 – Tablas de verdad

Agenda

- Repaso clase anterior
- Tablas de verdad
- Clasificación de las proposiciones

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- **Repaso clase anterior**
- Tablas de verdad
- Clasificación de las proposiciones

Repaso clase anterior

Resumen conectores lógicos

Conector	Símbolo	Nombre	Explicación
Negación	$\neg p$	No	Cambia el valor de verdad de la proposición.
Conjunción	$p \wedge q$	Y (AND)	Es verdadera solo si ambas proposiciones son verdaderas
Disyunción inclusiva	$p \vee q$	O (OR)	Es verdadera si al menos una de las proposiciones es verdadera.
Disyunción exclusiva	$p \oplus q$	O exclusiva (XOR)	Es verdadera solo si una de las dos proposiciones es verdadera, pero no ambas.
Implicación	$p \rightarrow q$	Si... entonces (Implica)	Si p es verdadero, entonces q también lo es.
Bicondicional	$p \leftrightarrow q$	Si y solo si (doble implicación)	Ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad.

Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tablas de verdad

Negación

p	$\neg p$
F	V
V	F

And

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Or inclusivo

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

Or exclusivo

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Condicional

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Equivalencia

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reciproco, contrarrecíproco e inverso

Variaciones del condicional $p \to q$.

- **Reciproco (converse)**: $q \to p$
- **Contrarrecíproco (contrapositive)**: $\neg q \to \neg p$
- **Contrario (inverse)**: $\neg p \to \neg q$

Ejemplo:

Encuentre el recíproco, inverso y contrareciproco de la proposición "Que llueva es condición suficiente para que no vaya a la ciudad".

Proposiciones simples:

- p: Llueve
- q: No Voy a la ciudad

Que $\underbrace{\text{llueva}}_{p:\text{ Hipotesis}}$ es condición suficiente para que $\underbrace{\text{no vaya a la ciudad}}_{q:\text{ Tesis}}$

$p \to q$

Proposición	Expresión	Enunciado
Condicional	$p \to q$	Si llueve, entonces no voy a la ciudad
Reciproco	$q \to p$	Si no voy a la ciudad, entonces no esta lloviendo
Contrarrecíproco	$\neg q \to \neg p$	Si voy a la ciudad, entonces esta lloviendo
Inverso	$\neg p \to \neg q$	Si no llueve, entonces voy a la ciudad

Repaso clase anterior

Reglas de prioridad

<table>
<tr><th>Prioridad</th><th>Operador</th><th>Asociatividad</th></tr>
<tr><td>1</td><td>( )</td><td rowspan="5">Cuando se tienen varios operadores con la misma prioridad, la evaluación se hace de izquierda a derecha.
Cuando hay paréntesis anidados se evalúan primero los mas internos.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$\neg$</td></tr>
<tr><td>3</td><td>$\wedge$</td></tr>
<tr><td>4</td><td>$\vee$</td></tr>
<tr><td>5</td><td>$\rightarrow$ / $\leftrightarrow$</td></tr>
</table>

Agenda

- Repaso clase anterior
- **Tablas de verdad**
- Clasificación de las proposiciones

Tablas de verdad

Una **tabla de verdad** es una herramienta gráfica que se utiliza para analizar todos los posibles valores de verdad de los enunciados lógicos que la componen, a fin de determinar la validez de un enunciado o argumento junto con todos sus posibles resultados.

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

Tablas de verdad

Trabajando con tablas de verdad

Para construir una tabla de verdad se siguen los siguientes pasos:

1. Identificar las variables proposicionales.
2. Determinar el número de filas necesarias (para n variables 2^n columnas).
3. Construir las columnas de las variables (Falso = 0; Verdadero = 1).
4. Agregar columnas auxiliares si es necesario.

> **Tip de legibilidad**: Cuando la cantidad de columnas es muy grande es útil representar una expresión lógica (con letras minúsculas) con una letra mayúscula.

5. Evaluar la expresión lógica paso a paso.
6. Revisar y validar la tabla.

Ejemplo:
Construya una tabla de verdad para analizar todos los resultados posibles para la proposición:

$$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \rightarrow \neg \boldsymbol{r}$$

Tablas de verdad

Trabajando con tablas de verdad

Ejemplo:
Construya una tabla de verdad para analizar todos los resultados posibles para la proposición:

$$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \rightarrow \neg \boldsymbol{r}$$

Solución:
Vamos a ilustrar la aplicación de los pasos.

1. **Identificar las variables proposicionales**: p, q y r
2. **Determinar le numero de filas**: Tenemos $n = 3$, luego el numero de columnas es $col = 2^n = 2^3 = 8$.

Tablas de verdad

Trabajando con tablas de verdad

3. **Construir las columnas de las variables:**

$$\boldsymbol{p \lor q \to \neg r}$$

p	q	r
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Tablas de verdad

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Trabajando con tablas de verdad

4. Agregar columnas auxiliares si es necesario:

$p \vee q \rightarrow \neg r$

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \rightarrow \neg r$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Tablas de verdad

Trabajando con tablas de verdad

5. Evaluar la expresión lógica paso a paso
6. Revisar y validar la tabla

$$p \vee q \to \neg r$$

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

p	q	r	$\neg r$	$p \vee q$	$p \vee q \to \neg r$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0

Tablas de verdad

Tablas de verdad para el reciproco, el contrareciproco y el inverso

A continuación se muestra la tabla de verdad asociada al condicional, el reciproco, el contrareciproco y el inverso:

				Condicional	Reciproco	Contrarrecíproco	Inverso
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$	$\neg p \to \neg q$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1

Tablas de verdad

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejercicio 1

Construya una tabla de verdad para analizar todos los resultados posibles para la proposición:

1. $\neg(\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{p})$
2. $\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}$
3. $(\boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}) \rightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$
4. $[(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \vee (\neg \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r})] \leftrightarrow (\boldsymbol{r} \rightarrow \boldsymbol{q})$
5. $\neg \boldsymbol{p} \rightarrow (\neg \boldsymbol{r} \vee \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{p}) \leftrightarrow \boldsymbol{r} \vee \neg \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{q}$ (**Recomendación**: use el tip de legibilidad)

Tablas de verdad

Ejercicio 1: $\neg(p \wedge \neg p)$

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

p	$\neg p$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg p)$
0	1	0	1
1	0	0	1

Tablas de verdad

Ejercicio 2: $p \vee \neg q$

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

p	$\neg p$	$p \vee \neg q$
0	1	1
1	0	1

Tablas de verdad

Ejercicio 3: $(p \lor \neg q) \rightarrow (p \land q)$

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \land q$	$p \lor q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

p	q	$\neg p$	$p \lor \neg q$	$p \land q$	$(p \lor \neg q) \rightarrow (p \land q)$
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1

Tablas de verdad

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejercicio 4: $[(p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

p	q	r	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \wedge r$	$r \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge r)$	$[(p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$
0	0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	0	1	1	1

Tablas de verdad

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejercicio 5: $\neg p \rightarrow (\neg r \vee q \wedge p) \leftrightarrow r \vee \neg q \rightarrow p$

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

Definiendo la proposición F como:

$$F = \neg p \rightarrow (\neg r \vee q \wedge p) \leftrightarrow r \vee \neg q \rightarrow p$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge q$	$\neg r \vee q \wedge p$	$r \vee \neg q$	$\neg p \rightarrow (\neg r \vee q \wedge p)$	$\neg p \rightarrow (\neg r \vee q \wedge p) \leftrightarrow r \vee \neg q$	F
0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1

Agenda

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- Tablas de verdad
- **Clasificación de las proposiciones**

Clasificación de las proposiciones

En lógica proposicional, las proposiciones se clasifican según su valor de verdad en todas sus posibles interpretaciones (combinación de valores de la tabla de verdad) en tres tipos:

- **Tautologías**: Proposición que es siempre **verdadera** para todas las combinaciones.

  Ejemplo: $p \lor \neg p$

p	$\neg p$	$p \lor \neg q$
0	1	**1**
1	0	**1**

- **Contradicciones**: Proposición la cual es siempre **falsa** para todas las combinaciones.

  Ejemplo: $p \land \neg p$

p	$\neg p$	$p \land \neg q$
0	1	**0**
1	0	**0**

- **Contingencia**: Proposición que es **verdadera** para ciertas combinaciones y **falsa** para otras.

  Ejemplo: $[(\neg q \lor p) \to \neg p] \land q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \lor p$	$(\neg p \lor q) \to \neg p$	$[(\neg p \lor q) \to \neg p] \land q$
0	0	1	1	1	1	**0**
0	1	1	0	0	1	**1**
1	0	0	1	1	0	**0**
1	1	0	0	1	0	**0**

Clasificación de las proposiciones

Equivalencia lógica

- Dos proposiciones compuestas $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes, si $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ es una tautología.

Notación: Una equivalencia se puede escribir como $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ o como $\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{q}$

Ejemplo:
Demuestre que $\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$ son equivalentes.

$\neg p \vee q \overset{?}{\leftrightarrow} p \rightarrow q$ ⟷ $\neg p \vee q \overset{?}{\Leftrightarrow} p \rightarrow q$ ⟷ $\neg p \vee q \overset{?}{\equiv} p \rightarrow q$

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	V	V
F	V	V	V	F
V	F	V	F	F
V	V	V	V	V

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q \leftrightarrow p \rightarrow q$
0	0	1	1	1	**1**
0	1	1	1	1	**1**
1	0	0	0	0	**1**
1	1	0	1	1	**1**

Conclusión: $\neg \boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q} \equiv \boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}$

Clasificación de las proposiciones

Equivalencia lógica

Ejemplo: August de Morgan, estableció las siguientes leyes, conocidas como **Leyes de Morgan** en términos matemáticos:

- La negación de un enunciado **y** es lógicamente equivalente al enunciado **o** en el que cada componente es negado:

$$\boxed{\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q}$$

- La negación de un enunciado **o** es lógicamente equivalente al enunciado **y** en el que cada componente es negado.

$$\boxed{\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q}$$

Demuestre mediante tablas de verdad la segunda ley de Morgan.

$\neg(p \vee q) \overset{?}{\leftrightarrow} \neg p \wedge \neg q$ ⟷ $\neg(p \vee q) \overset{?}{\Leftrightarrow} \neg p \wedge \neg q$ ⟷ $\neg(p \vee q) \overset{?}{\equiv} \neg p \wedge \neg q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$q \vee p$	$\neg(q \vee p)$	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg(q \vee p) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1	0	1	1	**1**
0	1	1	0	1	0	0	**1**
1	0	0	1	1	0	0	**1**
1	1	0	0	1	0	0	**1**

Conclusión: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Clasificación de las proposiciones

Equivalencia lógica

Ejercicio: El la siguiente tabla se muestra la tabla de verdad de las diferentes variaciones de la estructura condicional.

				Condicional	Reciproco	Contrarrecíproco	Inverso
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$	$\neg p \to \neg q$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1

Según la tabla anterior. ¿Cuáles expresiones son lógicamente equivalentes?

Clasificación de las proposiciones

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Equivalencia lógica

Ejercicio: El la siguiente tabla se muestra la tabla de verdad de las diferentes variaciones de la estructura condicional.

				Condicional	Reciproco	Contrarrecíproco	Inverso
p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to q$	$q \to p$	$\neg q \to \neg p$	$\neg p \to \neg q$
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1

Según la tabla anterior. ¿Cuáles expresiones son lógicamente equivalentes?

$$p \to q \equiv q \to p$$

Clasificación de las proposiciones

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Equivalencia lógica

- Notas de clase del profesor Carlos Mario Sierra.
- **Matemáticas discretas y sus aplicaciones – 5ed** (Kenneth H. Rosen)
- **Lógica y Teoria de conjuntos** (Diana Patricia Acevedo Vélez, Juan Carlos Arango Parra)
- **Matemáticas para la computación – 2ed** (José Alfredo Jiménez Murillo).
- **Matemáticas discretas con aplicaciones - 4ed** (Susanna S. Epp)
- **Contemporary Mathematics** – Openstax (link)

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Curso de Matemáticas Discretas 1

Clase 2 – Tablas de verdad