Curso

Matemáticas Discretas I

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Clase 3 – Enfoque axiomático

Agenda

- Repaso clase anterior.
- Equivalencias lógicas.
- Uso de equivalencias lógicas para hacer demostraciones.

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- **Repaso clase anterior**
- Equivalencias lógicas.
- Uso de equivalencias lógicas para hacer demostraciones.

Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tablas de verdad

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

Reglas de prioridad

Prioridad	Operador	Asociatividad	Ejemplo con paréntesis
1 (la mas alta)	$\neg$	No aplica (unitario)	$\neg p \wedge q \longmapsto ((\neg p) \wedge q)$
2	$\wedge$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \wedge q \wedge r \longmapsto ((p \wedge q) \wedge r)$
3	$\vee$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \vee q \vee r \longmapsto ((p \vee q) \vee r)$
4	$\oplus$	Izquierda ($I \rightarrow D$)	$p \oplus q \oplus r \longmapsto ((p \oplus q) \oplus r)$
5	$\rightarrow$	Derecha ($D \rightarrow I$)	$p \rightarrow q \rightarrow r \longmapsto (p \rightarrow (p \rightarrow r))$
6 (la mas baja)	$\leftrightarrow$	Derecha ($D \rightarrow I$)	$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r \longmapsto (p \leftrightarrow (p \leftrightarrow r))$

Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Trabajando con tablas de verdad

Para construir una tabla de verdad se siguen los siguientes pasos:

1. Identificar las variables proposicionales.
2. Determinar el número de filas necesarias (para n variables 2^n columnas).
3. Construir las columnas de las variables (Falso = 0; Verdadero = 1).
4. Agregar columnas auxiliares si es necesario.

> **Tip de legibilidad**: Cuando la cantidad de columnas es muy grande es útil representar una expresión lógica (con letras minúsculas) con una letra mayúscula.

5. Evaluar la expresión lógica paso a paso.
6. Revisar y validar la tabla.

Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Trabajando con tablas de verdad

En lógica proposicional, las proposiciones se clasifican según su valor de verdad en todas sus posibles interpretaciones (combinación de valores de la tabla de verdad) en tres tipos:

- **Tautologías**: Proposición que es siempre **verdadera** para todas las combinaciones.
- **Contradicciones**: Proposición la cual es siempre **falsa** para todas las combinaciones.
- **Contingencia**: Proposición que es **verdadera** para ciertas combinaciones y **falsa** para otras.

Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Equivalencia lógica

Dos proposiciones compuestas p y q son lógicamente equivalentes, o simplemente equivalentes, si $p \leftrightarrow q$ es una tautología.

Notación: Una equivalencia se puede escribir como $p \leftrightarrow q$ o como $p \equiv q$

Propiedad doblemente negativa

$$\neg(\neg p) \equiv p$$

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
0	1	0
1	0	1

Demostración de una no equivalencia

$$\neg(p \wedge q) \not\equiv \neg p \wedge \neg q$$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- **Equivalencias lógicas.**
- Uso de equivalencias lógicas

Equivalencias lógicas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Leyes de Morgan

La negación de un enunciado **y** es lógicamente equivalente al enunciado o en el que cada componente es negado.

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

La negación de un enunciado **o** es lógicamente equivalente al enunciado en el que cada componente es negado.

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

$$\underbrace{\underbrace{\text{John es alto}}_{p}\ \textbf{y}\ \underbrace{\text{Jim es pelirrojo}}_{q}}_{p \wedge q} \xrightarrow{\neg(p \wedge q)} \underbrace{\text{John }\textbf{no}\text{ es alto}}_{\neg p}\ \textbf{o}\ \underbrace{\text{Jim }\textbf{no}\text{ es pelirrojo}}_{\neg q}$$

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Las leyes de Morgan pueden ser extendidas a mas proposiciones como se muestra a continuación:

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$$

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$$

Equivalencias lógicas

En cualquier enunciado variable dado $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ y $\boldsymbol{r}$, con una tautología $\mathbf{V}$ y una contradicción $\mathbf{F}$, son válidas las siguientes equivalencias lógicas:

Equivalencias lógicas		
Nombre	**Equivalencias**	
1. Leyes conmutativas	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
2. Leyes asociativas	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
3. Leyes distributivas	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Leyes de la identidad	$p \wedge \mathbf{V} \equiv p$	$p \vee \mathbf{F} \equiv p$
5. Leyes de negación	$p \vee \neg p \equiv \mathbf{V}$	$p \wedge \neg p \equiv \mathbf{F}$
6. Ley de la doble negación	$\neg(\neg p) \equiv p$	
7. Leyes de idempotencia	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
8. Leyes universales acotadas	$p \vee \mathbf{V} \equiv \mathbf{V}$	$p \wedge \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}$
9. Leyes de De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
10. Leyes de absorción	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
11. Negaciones de $\mathbf{V}$ y $\mathbf{F}$	$\neg \mathbf{V} = \mathbf{F}$	$\neg \mathbf{F} = \mathbf{V}$

- Las primeras cinco leyes forman un núcleo a partir del cual se pueden deducir las demás leyes. De hecho, estas son los axiomas de una estructura matemática conocida como álgebra booleana.
- Estas equivalencias son las leyes generales del pensamiento que se producen en todas las áreas del quehacer humano.

Equivalencias lógicas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

A continuación se muestran algunas equivalencias útiles para proposiciones compuestas que usan condicionales y enunciados bicondicionales:

Equivalencias lógicas con condicionales
$p \to q \equiv \neg p \lor q$
$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$
$p \lor q \equiv \neg p \to q$
$p \land \neg q \equiv \neg(p \to \neg q)$
$\neg(p \to q) \equiv p \land \neg q$
$(p \to q) \land (p \to r) \equiv p \to (q \land r)$
$(p \to r) \land (q \to r) \equiv (q \lor r) \to r$
$(p \to q) \lor (p \to r) \equiv p \to (q \lor r)$
$(p \to r) \lor (q \to r) \equiv (p \land q) \to r$
$p \lor (p \land q) \equiv p$

Equivalencias lógicas con bicondicionales
$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \lor (q \to p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

Equivalencias lógicas

Construcción de nuevas equivalencias lógicas

- Es posible demostrar que dos expresiones son lógicamente equivalentes desarrollando una serie de pasos que conlleven a enunciados lógicamente equivalentes mediante uso de las equivalencias de las tablas anteriores.
- Para probar que $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{B}$, producimos una serie de equivalencias empezando con $\boldsymbol{A}$ y finalizando con $\boldsymbol{B}$.

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A} \equiv A_1 \\ \vdots \\ A_n \equiv \boldsymbol{B}\end{gathered}$$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- Equivalencias lógicas
- **Uso de equivalencias lógicas**

Uso de equivalencias lógicas

Principales identidades lógicas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \to Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \to Q \equiv \neg Q \to \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \to Q) \wedge (Q \to P)$	

Uso de equivalencias lógicas

Uso de las identidades lógicas

Las identidades lógicas se emplean para manipular fórmulas lógicas de forma válida, asegurando que las transformaciones no cambien el significado lógico. Los principales casos de uso son para:

- Simplificación de proposiciones lógicas complejas.
- Demostración de equivalencias entre expresiones.
- Verificación de la validez de argumentos.

Uso de equivalencias lógicas

Ejemplos

1. Demuestre mediante el uso de identidades lógicas demuestre la ley de la absorción para el **Y**
2. Demuestre que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ es lógicamente equivalente a $\neg p \wedge \neg q$
3. Pruebe la siguiente equivalencia lógica: $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$
4. Demuestre que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ es una tautología.
5. Considerar el siguiente argumento: "Si la ley no fue aprobada, entonces la constitución del país queda sin modificaciones. Si la constitución del país queda sin modificaciones no se puede elegir nuevos diputados. O se eligen nuevos diputados o el informe del presidente del país se retrasará. El informe no se retrasó un mes. Por lo que la ley fue aprobada". Verificar su validez por la prueba formal de validez.

Uso de equivalencias lógicas

Ejemplo 1

La ley de la absorción para el Y establece que $p \wedge (p \vee q) \equiv p$. A continuación se describe el procedimiento usando el enfoque axiomático.

Solución:

Procedimiento			Razón
$p \wedge (p \vee q)$	$\equiv$	$(p \wedge p) \vee (p \wedge q)$	Distributividad para el **Y**
	$\equiv$	$p \vee (p \wedge q)$	Idempotencia para el **Y**
	$\equiv$	$(p \wedge \boldsymbol{V}) \vee (p \wedge q)$	Identidad para el **Y**
	$\equiv$	$p \wedge (\boldsymbol{V} \vee q)$	Distributividad para el **Y** $(I \leftarrow D)$
	$\equiv$	$p \wedge (\boldsymbol{V})$	Dominación para el **O**
	$\equiv$	p	Identidad para el **Y**

Uso de equivalencias lógicas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2

Realizar la demostración consiste decir que $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$

Solución:

Procedimiento			Razón
$\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$	$\equiv$	$\neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q)$	Ley de Morgan para la disyunción (**O**)
	$\equiv$	$\neg p \wedge [\neg(\neg p) \vee \neg q]$	Ley de Morgan para la conjunción (**Y**)
	$\equiv$	$\neg p \wedge (p \vee \neg q)$	Doble negación
	$\equiv$	$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$	Lay distributiva para la conjunción (**Y**)
	$\equiv$	$\mathbf{F} \vee (\neg p \wedge \neg q)$	Complemento para el **Y**
	$\equiv$	$(\neg p \wedge \neg q) \vee \mathbf{F}$	Ley conmutativa para la disyunción (**O**)
	$\equiv$	$(\neg p \wedge \neg q)$	Ley de la identidad para la disyunción (**O**)

Uso de equivalencias lógicas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 3

A continuación se describen los pasos para demostrar que: $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

Solución:

Procedimiento			Razón
$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q)$	$\equiv$	$[\neg(\neg p) \vee \neg q] \wedge (p \vee q)$	Ley de Morgan para la conjunción (**Y**)
	$\equiv$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$	Doble negación
	$\equiv$	$[p \wedge (p \vee q)] \vee [\neg q \wedge (p \vee q)]$	Ley distributiva para la conjunción (**Y**)
	$\equiv$	$p \vee [\neg q \wedge (p \vee q)]$	Ley de absorción para para la conjunción (**Y**)
	$\equiv$	$p \vee [(\neg q \wedge p) \vee (\neg q \wedge q)]$	Ley distributiva para la conjunción (**Y**)
	$\equiv$	$p \vee [(\neg q \wedge p) \vee \mathbf{F}]$	Complemento para la conjunción (**Y**)
	$\equiv$	$p \vee (\neg q \wedge p)$	Ley de la identidad para la conjunción (**Y**)
	$\equiv$	$(p \vee \neg q) \wedge (p \vee p)$	Ley distributiva para la disyunción (**O**)
	$\equiv$	$(p \vee \neg q) \wedge p$	Idempotencia para la disyunción (**O**)
	$\equiv$	$p \wedge (p \vee \neg q)$	Ley conmutativa para la conjunción (**Y**)
	$\equiv$	$p \wedge \boldsymbol{V}$	Complemento para para la disyunción (**O**)
	$\equiv$	p	Identidad para la conjunción (**Y**)

Uso de equivalencias lógicas

Ejemplo 4

La expresión lógica $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ si se logra demostrar que el valor lógica de esta siempre es verdadero (***V***)

Solución:

Procedimiento			Razón
$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$	$\equiv$	$\neg(p \wedge q) \vee (p \vee q)$	Implicación
	$\equiv$	$(\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q)$	Ley de Morgan para la conjunción (**Y**)
	$\equiv$	$(\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)$	Leyes conmutativa y asociativa para la disyunción (**O**)
	$\equiv$	$\mathbf{V} \vee \mathbf{V}$	Complemento para la disyunción (**O**)
	$\equiv$	$\mathbf{V}$	Por tablas de verdad

Uso de equivalencias lógicas

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 5

Enunciado:

"Si la ley no fue aprobada, entonces la constitución del país queda sin modificaciones. Si la constitución del país queda sin modificaciones no se puede elegir nuevos diputados. O se eligen nuevos diputados o el informe del presidente del país se retrasará. El informe no se retrasó un mes. Por lo que la ley fue aprobada"

Proposiciones simples: Inicialmente se deben identificar las proposiciones simples.

- $\boldsymbol{l}$: La ley fue aprobada.
- $\boldsymbol{c}$: La constitución del país quedará sin modificaciones.
- $\boldsymbol{p}$: Se pueden elegir nuevos diputados.
- $\boldsymbol{i}$: El informe del presidente se retrasará un mes.

Planteamiento proposicional:

$$\text{Premisas}\left\{\begin{array}{l} \neg l \to c \\ c \to \neg d \\ d \lor i \\ \neg i \end{array}\right.$$

$$\text{Conclusiones}\left\{\begin{array}{l} \therefore\ l \end{array}\right.$$

Referencias

Enlaces y referencias

- Notas de clase del profesor Carlos Mario Sierra.
- **Matemáticas discretas y sus aplicaciones – 5ed** (Kenneth H. Rosen)
- **Lógica y Teoria de conjuntos** (Diana Patricia Acevedo Vélez, Juan Carlos Arango Parra)
- **Matemáticas para la computación – 2ed** (José Alfredo Jiménez Murillo).
- **Matemáticas discretas con aplicaciones - 4ed** (Susanna S. Epp)
- **Contemporary Mathematics** – Openstax (link)

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Curso de Matemáticas Discretas 1

Clase 3 – Enfoque Axiomático