Curso

Matemáticas Discretas I

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Clase 5 – Lógica cuantificacional

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Resumen rápido lógica proposicional
- Introducción
- Conceptos importantes
- Ejemplos 1
- Cuantificadores
- Ejemplos 2
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Un poco de Prolog

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- **Resumen rápido lógica proposicional**
- Introducción
- Conceptos importantes
- Ejemplos 1
- Cuantificadores
- Ejemplos 2
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Un poco de Prolog

Resumen rápido lógica proposicional

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Lógica proposicional

- Rama de la lógica que estudia las proposiciones y las relaciones lógicas entre ellas.
  - **Proposición**: Enunciado que puede ser cierto o falso pero no ambos a la vez.
  - **Relaciones lógicas**: Conectores lógicos ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\oplus$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$)
- **Otros nombres**: Lógica de enunciados o lógica sentencial
- **En la lógica proposicional**:
  - No interesa el contenido de las frases.
  - Solo importa la estructura lógica y su valor de verdad.
  - Se estudian reglas de inferencia (cómo deducir nuevas verdades).
  - Se usan tablas de verdad para analizar las proposiciones.

Enunciado:
Si doña Florinda no se encuentra con el profesor Jirafales, entonces fue que se voló con don Ramon.

Proposiciones simples:

$\boldsymbol{p}$: Doña Florinda se encuentra con el profesor Jirafales,
$\boldsymbol{q}$: Doña Florinda se volo con don Ramon,

Expresión lógica

$$\neg p \rightarrow q$$

Resumen rápido lógica proposicional

Tablas de verdad

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \oplus q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
F	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V

Reglas de prioridad

Prioridad	Operador	Asociatividad
1 (mas alta)	$\neg$	No aplica (unitario)
2	$\wedge$	Izquierda ($I \rightarrow D$)
3	$\vee$	Izquierda ($I \rightarrow D$)
4	$\oplus$	Izquierda ($I \rightarrow D$)
5	$\rightarrow$	Derecha ($I \leftarrow D$)
6 (mas baja)	$\leftrightarrow$	Derecha ($I \leftarrow D$)

Resumen rápido lógica proposicional

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Equivalencias lógicas

Equivalencia lógica

Dos proposiciones compuestas $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son equivalentes si $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ es una tautología.

Construcción de equivalencias lógicas

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A} \equiv A_1 \\ \vdots \\ A_n \equiv \boldsymbol{B} \end{gathered}$$

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

Resumen rápido lógica proposicional

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

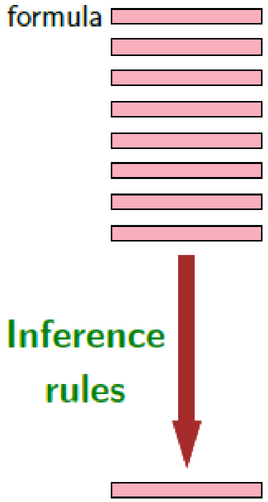
Reglas de inferencia

Argumento

$$\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n}_{\text{Premisas}} \to \underbrace{q}_{\text{Conclusión}}$$

Validez lógica

Un argumento de **valido** si la conclusión es verdadera cuando las premisas son verdaderas.



Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore q$	Simplificación	$p \wedge q$ $\therefore p$
Modus Tollens	$p \to q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	Conjunción	p q $\therefore p \wedge q$
Silogismo hipotético (Transitividad)	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	Prueba de división por casos	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$		
Adición	p $\therefore p \vee q$	Resolución	$\neg p \vee r$ $p \vee q$ $\therefore q \vee r$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

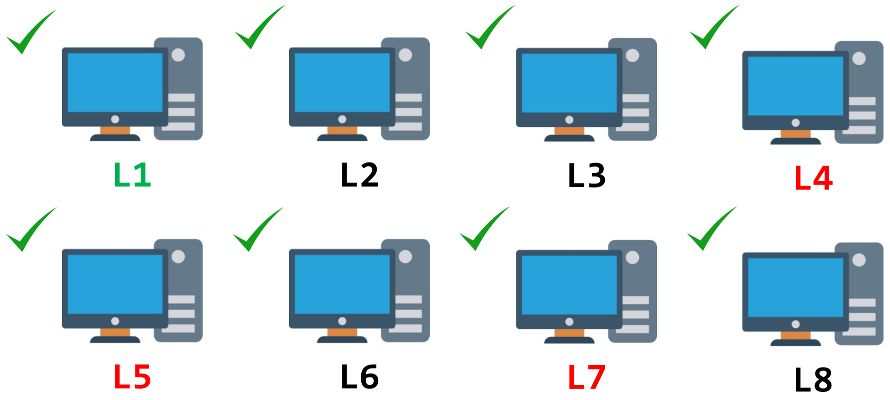
- Resumen rápido de lógica proposicional
- **Introducción**
- Conceptos importantes
- Ejemplos 1
- Cuantificadores
- Ejemplos 2
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal

Introducción

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Limitaciones de la lógica proposicional

Ejemplo: Suponga que enunciado:



Todos los computadores del LIS están funcionando correctamente

Con base en el anterior enunciado **no se pueden** concluir lo siguiente:

- El computador L1 esta funcionando correctamente.
- El computador L4 tiene el sistema operativo malo.
- El computador L5 tiene un virus.
- El computador L7 no tiene teclado.

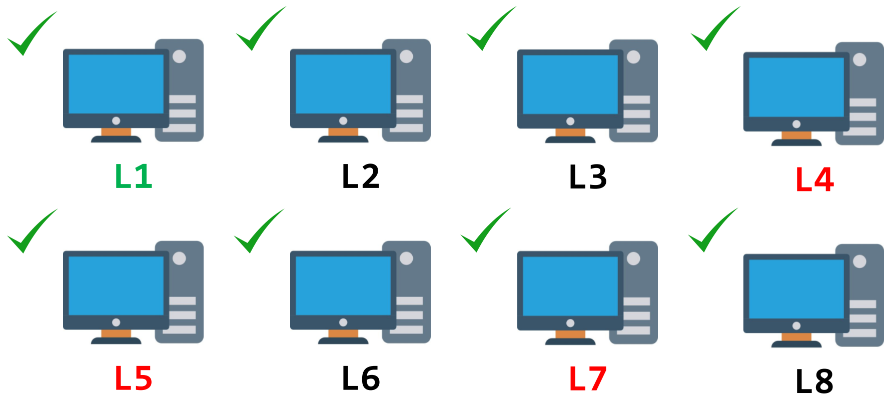
Introducción

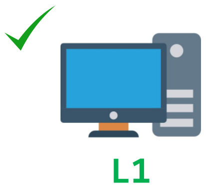
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Limitaciones de la lógica proposicional

Analizando el ejemplo con lo que sabemos de lógica proposicional tenemos:

$\underbrace{\text{Todos los computadores del LIS están funcionando correctamente}}_{p}$





$\underbrace{\text{El computador L1 esta funcionando correctamente}}_{q}$

$\underbrace{\text{El computador L4 tiene el sistema operativo malo}}_{r}$

$\underbrace{\text{El computador L5 tiene un virus}}_{s}$

$\underbrace{\text{El computador L7 no tiene teclado}}_{t}$

Introducción

Limitaciones de la lógica proposicional

Problema: En la siguiente tabla se muestran algunas razones por las que la lógica proposicional se queda corta:

Limitación	**Anotaciones**
No distingue el contenido interno de las proposiciones lo cual no permite hacer razonamientos sobre objetos individuales.	Con lo que se afirma no se puede saber nada sobre objetos como L1, L2, etc. Por ejemplo, con lo que se tiene no es posible saber que entre las proposiciones p y r hay una contradicción (en lógica proposicional) por que no sabemos que L4 es un computador que pertenece al LIS.
No es posible expresar generalizaciones ni excepciones	No se puede decir cosas como: • Todos los computadores *excepto* L4 funcionan bien, • Si un computador tiene virus, entonces no funciona bien. Por lo tanto no es posible decir cosas como: "Todos excepto..."
Como no se puede conectar internamente las ideas expuestas, no es posible establecer relaciones lógicas complejas.	Lo que se dice no deja claro como dar respuestas a pregunta como: • ¿Qué computadores pertenecen al LIS? • ¿Qué significa "funcionar correctamente"? • ¿Un computador con virus funciona o no? Por lo tanto no hay forma de dar soporte a relaciones como: “Si tiene virus entonces no funciona".

Conclusión: La lógica proposicional es buena para verdades globales y simples. Pero si lo que se quiere es modelar un sistema realista de computadores con fallas específicas, propiedades, reglas y excepciones, se necesita otro tipo de lógica diferente.

Introducción

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Sujeto y predicado (Lenguaje natural)

En cualquier idioma toda oración (conjunto de palabras que expresa una idea completa y tiene sentido por sí sola) están formadas por:

- **Sujeto**: De quién o de qué se habla.
- **Predicado**: Lo que se dice del sujeto.

L1

$$\underbrace{\text{El computador L1}}_{\text{Sujeto}}\ \underbrace{\text{esta funcionando correctamente}}_{\text{Predicado}}$$

$$\underbrace{\text{El perro de Bart}}_{\text{Sujeto}}\ \underbrace{\text{se llama ayudante de Santa}}_{\text{Predicado}}$$

Introducción

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Contexto en lógica proposicional

L1

$\underbrace{\text{El computador L1}}_{\text{Sujeto}}\ \underbrace{\text{esta funcionando correctamente}}_{\text{Predicado}}$

En **lógica proposicional**, teniendo en cuenta que la unidad fundamental es la proposición, todo lo anterior se representa mediante una proposición.

- Solo interesa si lo que se dice es verdadero o falso.
- No interesa saber que es cosas como “computador” y “funcionando”

$\underbrace{\text{El computador L1 esta funcionando correctamente}}_{\text{Proposición}} \longrightarrow p$

Conclusión: La lógica proposicional se queda corta en representar la realidad por lo que se necesita otro tipo de lógica: **La lógica de predicados**.

Introducción

Contexto en lógica de predicados (lógica cuantificacional)

L1

$$\underbrace{\text{El computador L1}}_{\text{Sujeto}}\ \underbrace{\text{esta funcionando correctamente}}_{\text{Predicado}}$$

En **lógica de predicados** se separa el sujeto del predicado y se modelan formalmente:

- **Sujeto**: Se representa como un ***objeto*** o ***individuo***
- **Predicado**: Se representa como una ***propiedad*** o ***relación***

$$\underbrace{\text{El computador L1}}_{\text{Sujeto}}\ \underbrace{\text{esta funcionando correctamente}}_{\text{Predicado}}$$

- **Objeto** - $\boldsymbol{L1}$: Computador L1
- **Predicado** - $\boldsymbol{funciona(x)}$: x esta funcionando correctamente]

$$\boxed{funciona(L1)}$$

Introducción

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Contexto en lógica de predicados (lógica cuantificacional)

La separación del sujeto del predicado posibilita:

- Hablar de uno o varios individuos.
- Definir reglas generales.
- Realizar inferencias lógicas mas potentes.

La siguiente tabla retoma el ejemplo original separando el sujeto del predicado:

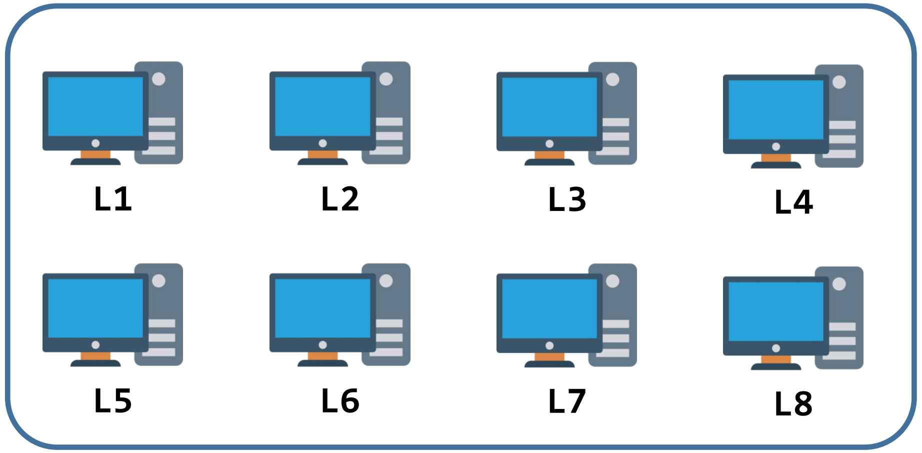
Enunciado	**Sujeto**	**Predicado**
Todos los computadores del LIS están funcionando correctamente	Todos los computadores del LIS	están funcionando correctamente
El computador L1 esta funcionando correctamente	El computador L1	esta funcionando correctamente
El computador L4 tiene el sistema operativo malo	El computador L4	tiene el sistema operativo malo
El computador L5 tiene un virus	El computador L5	tiene un virus
El computador L7 no tiene teclado	El computador L7	no tiene teclado

Introducción

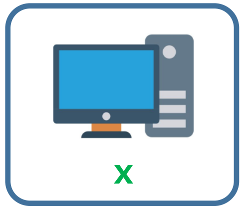
Contexto en lógica de predicados (lógica cuantificacional)

En lógica de predicados es necesario tener claridad con los siguientes conceptos claves:

- **Universo**: Todos los computadores del LIS: $\{L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7, L8\}$

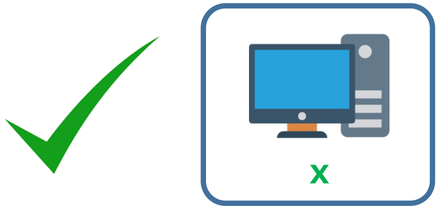


- **Variable**: Un computador cualquiera del LIS: x



- **Individuo**: Computadores específicos: $L1$, $L2$ o cualquier otro.

- **Predicado**: El computador x funciona correctamente: $funciona(x)$



Introducción

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Contexto en lógica de predicados (lógica cuantificacional)

Si se contextualiza lo anterior con los ejemplos dados se tiene:

Elemento	Tipo	Ejemplo / Definición	Interpretación
Universo	Conjunto de referencia	$\{L1, L2, L3, \ldots, Ln\}$	Todos los computadores del LIS
Variable	Variable individual	x	Un computador cualquiera del LIS
Individuos	Elementos concretos del universo	$L1, L4, L5, L7$	Computadores específicos
Predicado	Propiedad o relación sobre x	$funciona(x)$	"El computador x funciona correctamente"
Predicado	Propiedad o relación sobre x	$tiene\_OS\_malo(x)$	"El computador x tiene el sistema operativo malo"
Predicado	Propiedad o relación sobre x	$tiene\_virus(x)$	"El computador x tiene un virus"
Predicado	Propiedad o relación sobre x	$sin\_teclado(x)$	"El computador x no tiene teclado"
Predicado	Propiedad o relación sobre x	$computador\_LIS(x)$	"x pertenece al LIS" (opcional, si se quiere restringir universo)

Introducción

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Contexto en lógica de predicados (lógica cuantificacional)

Si se contextualiza lo anterior con los ejemplos dados se tiene:

#	Enunciado	Representación	Interpretación
1	Todos los computadores del LIS están funcionando correctamente	$\forall x(computador\_LIS(x) \rightarrow funciona(x))$	Para todo computador x del LIS, x funciona correctamente
2	El computador L1 esta funcionando correctamente	$funciona(L1)$	L1 esta funcionando correctamente
3	El computador L4 tiene el sistema operativo malo	$tiene\_OS\_malo(L4)$	L4 tiene el sistema operativo malo
4	El computador L5 tiene un virus	$tiene\_virus(L5)$	L5 tiene un virus
5	El computador L7 no tiene teclado	$sin\_teclado(L7)$	L7 no tiene teclado

Introducción

Lógica de predicados – Lógica de primer orden – Lógica cuantificacional

- La lógica de primer orden (**FOL**: First Order Logic) es una extensión de la **lógica proposicional** que permite razonar sobre objetos individuales y sus propiedades o relaciones.
- La siguiente tabla muestra lo que se agrega respecto a la lógica proposicional:

Lógica proposicional	**Lógica de predicados**
Solo proposiciones completas p, q, r.	Objetos, propiedades, relaciones y reglas generales.
No sabe *qué hay dentro* de p	Puede decir cosas de *cada objeto*.
No usa cuantificadores.	Usa cuantificadores: • $\forall$: Para todo. • $\exists$: Existe

- La comprensión de conceptos de lógica de primer orden el clave en disciplinas como: inteligencia artificial, sistemas expertos, lenguajes como prolog y representación del conocimiento entre otras.

Agenda

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

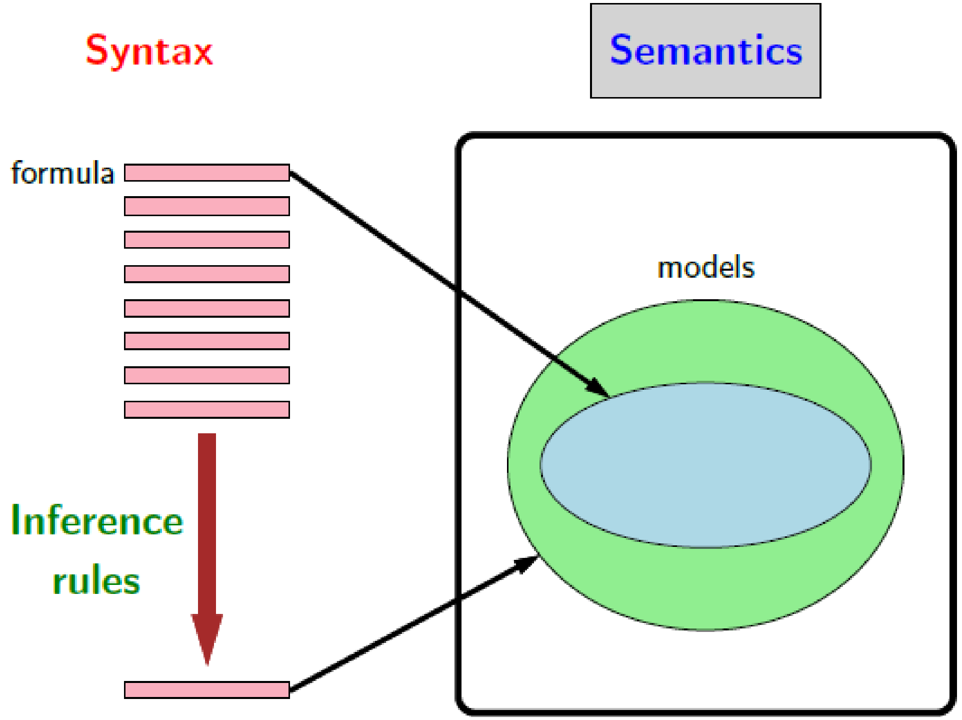
- Resumen rápido de lógica proposicional
- Introducción
- **Conceptos importantes**
- Ejemplos 1
- Cuantificadores
- Ejemplos 2
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Un poco de Prolog

Conceptos importantes

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Modelo

- Un modelo es una representación de la realidad construido a partir de ciertos elementos y reglas.
- Un modelo permite analizar o explicar un fenómeno.
- En lógica, un modelo es una interpretación que asigna significado a los símbolos de un lenguaje lógico, y que hace que un conjunto de fórmulas sea verdadero.



Lógica proposicional: El modelo w mapea símbolos proposicionales a tablas de verdad.

$$w = \{\underbrace{ClotildeDominaCalculo}_{p}: 1, \underbrace{RamonDominaCalculo}_{q}: 0\} = \{p, \neg q\}$$

Lógica cuantificacional: ?

Conceptos importantes

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Lógica cuantificacional

- La lógica cuantificacional (lógica de primer orden o lógica de predicados) es un sistema lógico para razonar sobre las propiedades de los objetos.
- Complementa los conectores lógicos de la lógica proposicional con:
    - **Predicados** que describen las propiedades de los objetos

Optimus Prime esta enfermo

    - **Funciones** que relacionan objetos entre sí

Ratchet es el medico de Optimus y le dijo que tiene cancer de próstata.

    - **Cuantificadores** que permiten razonar sobre múltiples objetos.

Todos los autobots defienden a la tierra.

Nota: Para contexto ver el siguiente link

Conceptos importantes

Conceptos claves

En lógica de predicados es importante tener claros los siguientes conceptos:

- Universo o dominio
- Objetos o individuos
- Predicados
- Variables
- Conjunto de verdad
- Cuantificadores.
- Funciones proposicionales

Optimus Prime esta enfermo

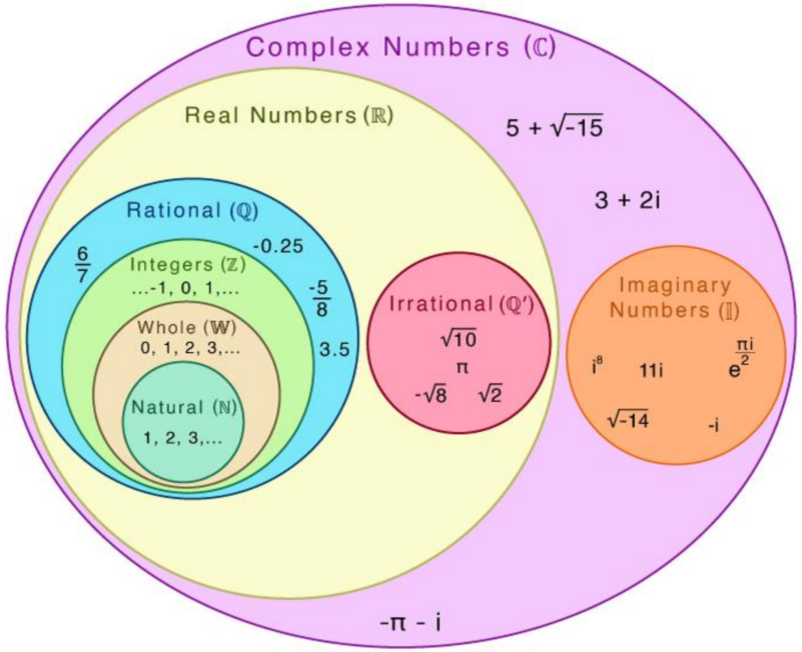
Concepto	Representación	Expresión
Universo	Transformers (Autobots y Decepticons)	$U = \{Optimus, Bubumblebee, \dots\}$
Objeto	Optimus Prime	$Optimus$
Predicado	x está enfermo	$enfermo(x)$
Variables	Cualquier transformer	x
Cuantificadores	Luego lo veremos.	---

Conceptos importantes

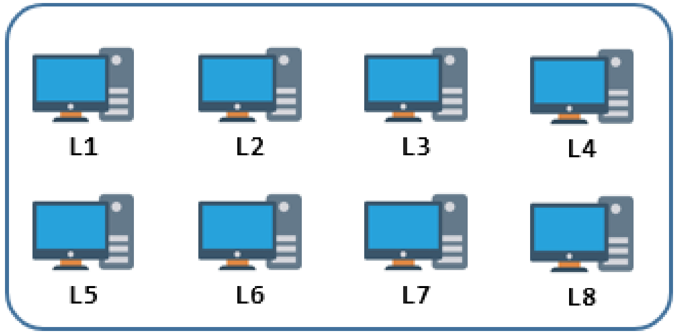
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Universo

- El **universo** (también llamado **dominio del discurso**) es el conjunto de todos los objetos sobre los que estamos razonando dentro de una teoría lógica. En otras palabras, es el mundo que se esta modelando.
- El universo es definido por quien modela el problema, por lo tanto tiene contexto.



Contexto	Universo
Computadores del LIS	$\{L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7, L8\}$
Transformers	$\{Megatron, Optimus, \dots\}$
Números reales	$(-\infty. +\infty)$
Apóstoles	$\{Pedro, Juan, Santiago, \dots\}$
Números enteros	$\{-\infty, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$



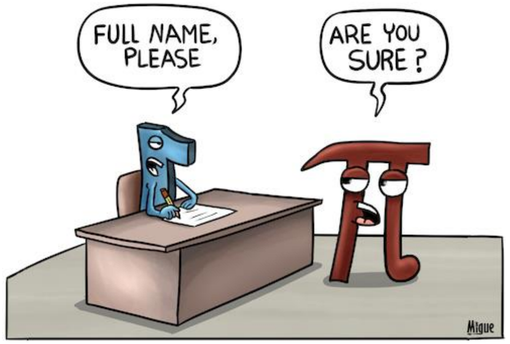
Conceptos importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Objeto

- Un objeto (también llamado **individuo** o **elemento**) es un miembro concreto del universo o dominio sobre el cual se esta razonando.

Contexto	Universo	Objeto
Computadores del LIS	$\{L1, L2, L3, L4, L5, L6, L7, L8\}$	$L6$
Transformers	$\{Megatron, Optimus, \dots\}$	$elita\_one$
Números reales	$(-\infty. +\infty)$	π
Apóstoles	$\{Pedro, Juan, Santiago, \dots\}$	$Pedro$
Números enteros	$\{-\infty, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, +\infty\}$	4



Conceptos importantes

Predicado

- Un predicado es una **función lógica** que expresa una propiedad de un objeto o una relación entre objetos dentro del universo.
- Permite describir qué es cierto respecto a los elementos del universo lógico.
- Para representar un predicado se usan **funciones proposicionales**. A continuación, se muestran algunos ejemplos:
  - **Unitario**: $P(x)$ – Propiedad de un objeto
  - **Binario**: $Q(x, y)$ – Relación entre dos objetos
  - **Ternario**: $R(x, y, z)$ – Relación entre tres objetos.

Tipo	Predicado	Objeto
Unitario	$enfermo(x)$	x esta enfermo
Binario	$medico(x, y)$	x es medico de y
Ternario	$dijo(x, y, z)$	x le dijo y que z

Frase en lenguaje natural

$\underbrace{\text{Ratchet}}_{x}$ le dijo a $\underbrace{\text{Optimus}}_{y}$ que $\underbrace{\text{esta enfermo}}_{z\,=\,enfermo(x)}$

Objetos	Predicados	Expresión lógica
• $ratchet$ • $optimus$	• $enfermo(x)$ • $dijo(x, y, z)$	$dijo(ratchet, optimus, enfermo(optimus))$

Conceptos importantes

Variables

- Una variable es un símbolo que representa **cualquier objeto** (**no específico**) dentro del universo o dominio del discurso.
- No tienen un valor fijo por sí solas, sino que pueden tomar cualquier valor posible del conjunto del dominio.

Ejemplo

x es una persona

$persona(x)$: Predicado

x: Es una **variable**, no sabemos quien es, puede cambiar

$Homero$ es una persona

$persona(homero)$: Predicado

$homero$: Es una **constante**, se refiere a un individuo especifico del universo

Conceptos importantes

Conjunto de verdad

- El conjunto de verdad de un predicado $P(x)$ es el subconjunto del dominio D formado por todos los elementos para los cuales el predicado es verdadero, es decir:

$$\{x \in D \mid P(x) \text{ es verdadero}\}$$

Ejemplo: Si definimos D como el dominio de todos los Transformers (Autobots y Decepticons) y tenemos como predicado $A(x)$: x es un autobot el dominio será

$$\{x \in D \mid autobot(x) \text{ es verdadera}\}$$

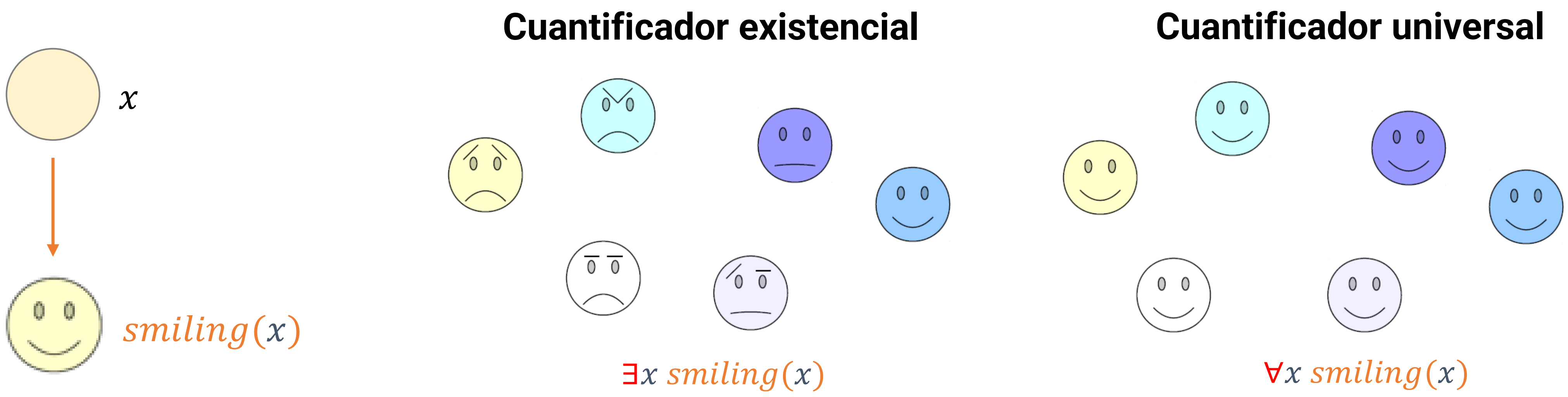
$autobot(Optimus) = $ **Verdadero**

$autobot(Megatron) = $ **Falso**

Conceptos importantes

Cuantificador

- Los cuantificadores son **símbolos lógicos** que se usan para **indicar cuántos elementos** del dominio cumplen una determinada propiedad (expresada por un predicado o una función proposicional).
- Existen dos clases de cuantificadores:
  - **Cuantificador universal ($\forall x$)**: Para todo x
  - **Cuantificador existencial ($\exists x$)**: Existe al menos un x



Conceptos importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Función proposicional

- Una **función proposicional** es una expresión lógica que contiene variables libres (x, y, etc.), y que todavía no es una proposición completa.
- Una función proposicional se convierten en proposición cuando:
  - Se le asignan valores a sus variables.
  - Se le aplica un cuantificador.

Ejemplos: En ambos casos asuma que el universo U para las variables involucradas son los enteros

$\boldsymbol{P(x)}$: x es mayor que 5

Expresión	Concepto
$P(x)$	Función proposicional (1 variable)
$P(7)$	Proposición Verdadera
$P(3)$	Proposición Falsa
$\forall x\ P(x)$	Proposición general

$\boldsymbol{R(x,y,z)}$: $x+y=z$

Expresión	Concepto
$R(x,y,z)$	Función proposicional (3 variables)
$R(2,-1,5)$	Proposición Falsa
$R(3,4,7)$	Proposición Verdera
$R(x,3,z)$	Función proposicional (2 variables)

Observación importante:
- Muchos textos usan ambos términos (predicado y función proposicional) como equivalentes, especialmente en cursos introductorios.
- Formalmente, **predicado** es el término más usado en lógica de primer orden.

Conceptos importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Expresiones compuestas

- Son **fórmulas lógicas** formadas al combinar **predicados, funciones y cuantificadores** mediante **conectivos lógicos** ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$).
- Estas expresiones permiten construir afirmaciones complejas que pueden involucrar múltiples objetos, relaciones y condiciones dentro de un mismo razonamiento lógico.
- Las expresiones con variables no son proposiciones y por lo tanto no tienen valores de verdad.
- Cuando se las expresiones se usan con cuantificadores, estas expresiones (funciones proposicionales) se convierten en proposiciones.

Ejemplos: Suponga que se tienen los siguiente predicados:
- $\boldsymbol{P(x)}$: "x es un profesor"
- $\boldsymbol{Q(x)}$: "x es un ingeniero“

Una expresión compuesta podría ser: "x es un profesor y x es un ingeniero“ y se escribe como:

$$P(x) \wedge Q(x)$$

Si en la expresión anterior, se reemplaza x por un objeto especifico como $\text{CPH (Charles Proteus Steinmetz)}$ la expresión se convierte en la siguiente proposición:

$$P(\text{CPH}) \wedge Q(\text{CPH})$$

Charles Proteus Steinmetz (link)

Conceptos importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tabla de verificación de tipos

Muy útil en problemas de lógica de primer orden. Esta tabla tabla describe tres tipos de componentes lógicos: conectivos, predicados y funciones, y explica:

- Sobre que operan (Tipo de entrada)
- Que producen (Tipo de salida)

Elemento	**Opera sobre...**	**Produce...**	**Ejemplo**
Conectivos (↔, ∧, ∨, ¬,...)	Proposiciones	Una proposición	$P \land Q$, $\neg P$, $P \rightarrow Q$
Predicados (=, <,)	Objetos	Una proposición	$mayor\_que(x, y)$, $x = y$, $par(x)$
Funciones	Objetos	Un objeto	$doble(x)$, $padre\_de(x)$, $suma(x, y)$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- Introducción
- Validación de argumentos
- Reglas de inferencia
- **Ejemplos 1**
- Cuantificadores
- Ejemplos 2
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Un poco de Prolog

Ejemplos 1

Enunciados

1. **Determinación de los valores de verdad de un predicado**: Sea $P(x)$ el predicado "$x^2 > x$" con dominio el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales. Escriba $P(2)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ y $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ e indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos.
2. **Determinación del conjunto de verdad de un predicado**: Sea $Q(n)$ el predicado "n es un factor de 8". Determine el conjunto de verdad de $Q(n)$ si:
   a. el dominio de n es el conjunto $\mathbb{Z}^+$ de todos los enteros positivos.
   b. el dominio de n es el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros.
3. A continuación se dan varias afirmaciones, diga si la afirmación es una función proposicional. Para cada afirmación que sea una función proposicional, dé un dominio de discurso.
   a. $(2n + 1)^2$ es un entero impar.
   b. Selección un numero entre 1 y 10.
   c. Sea x un numero real.
   d. La película ganó el premio de la Academia como mejor película en 1955.
   e. 1 + 3 = 4.
   f. Existe x tal que $x < y$ (x, y números reales).

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Enunciados

4. Sea $P(x)$ la afirmación "$x > 3$". ¿Cuáles son los valores de verdad de $P(4)$ y $P(2)$?
5. Sea $A(x)$ la afirmación "$\text{La computadora } x \text{ esta siendo atacada por un intruso}$“. Suniendo que, de las computadoras del campus, solo CS2 y MATH1 están siendo atacadas por intrusos. ¿Cuáles son los valores de verdad de $A(\text{CS1})$, $A(\text{CS2})$ y $A(\text{MATH1})$?
6. Sea $Q(x, y)$ la afirmación "$x = y + 3$ “. ¿Cuáles son los valores de verdad de las proposiciones $Q(1,2)$ y $Q(3,0)$?

Ejemplos 1

Ejemplo 1

Determinación de los valores de verdad de un predicado: Sea $P(x)$ el predicado "$x^2 > x$" con dominio el conjunto $\mathbb{R}$ de todos los números reales. Escriba $P(2)$, $P\left(\frac{1}{2}\right)$ y $P\left(-\frac{1}{2}\right)$ e indique cuáles de los siguientes enunciados son verdaderos y cuáles son falsos.

Solución

Predicado: $P(x)$: $x^2 > x$ con dominio $\mathbb{R}$

Evaluación de cada caso expresión:

$$\boldsymbol{P(2)}: \quad P(2) = P(x = 2) = 2^2 > 2 = 4 > 2 \rightarrow \textbf{Verdadero}$$

$$\boldsymbol{P\left(\frac{1}{2}\right)}: \quad P\left(\frac{1}{2}\right) = P\left(x = \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \ngtr \frac{1}{2} \rightarrow \textbf{Falso}$$

$$\boldsymbol{P\left(-\frac{1}{2}\right)}: \quad P\left(-\frac{1}{2}\right) = P\left(x = -\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 > \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} > -\frac{1}{2} \rightarrow \textbf{Verdadero}$$

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2

Determinación del conjunto de verdad de un predicado: Sea $Q(n)$ el predicado "n es un factor de 8". Determine el conjunto de verdad de $Q(n)$ si:

a. el dominio de n es el conjunto $\mathbb{Z}^+$ de todos los enteros positivos.

b. el dominio de n es el conjunto $\mathbb{Z}$ de todos los enteros.

Predicado: $Q(n)$: n es un factor de 8 con dominio D

a. $Q(n)$: n es un factor de 8 con dominio $\mathbb{Z}^+$

$$\{x \in \mathbb{Z}^+ | \ Q(n) \text{ es verdarero}\} \rightarrow F_{\mathbb{Z}^+} = \{1,2,4,8\}$$

b. $Q(n)$: n es un factor de 8 con dominio $\mathbb{Z}$

$$\{x \in \mathbb{Z} | Q(n) \text{ es verdadero}\} \rightarrow F_{\mathbb{Z}} = \{-1,-2,-4,-8,1,2,4,8\} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$$

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 3

A continuación se dan varias afirmaciones, diga si la afirmación es una función proposicional. Para cada afirmación que sea una función proposicional, dé un dominio de discurso.

a. $(2n+1)^2$ es un entero impar.

b. Selección un numero entre 1 y 10.

c. Sea x un numero real.

d. La película ganó el premio de la Academia como mejor película en 1955.

e. 1 + 3 = 4.

f. Existe x tal que $x < y$ $(x, y$ números reales).

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 3

La siguiente tabla resume los resultados:

Afirmación	Función proposicional	Proposición	Universo
$(2n+1)^2$ es un entero impar	Si	No	Enteros ($\mathbb{Z}$)
Seleccione un numero entre 1 y 10.	No	No (Es una instrucción). En otras palabras dice que se tiene un entero n tal que: $$n \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$	---
Sea x un numero real.	No	No, que dice que $x \in \mathbb{R}$	---
La película ganó el premio de la Academia como mejor película en 1955.	Si, solo que se la afirmación se da en lenguaje natural. El predicado con el que se relaciona puede ser: • $P(x)$: x gano el Oscar de la academia como mejor película de 1995.	Si	Películas
1 + 3 = 4.	No	Si	---
Existe x tal que $x < y$ $(x, y$ números reales).	Si	No	Reales ($\mathbb{Z}$)

Ejemplos 1

Ejemplo 4

Sea $P(x)$ la afirmación "$x > 3$". ¿Cuáles son los valores de verdad de $P(4)$ y $P(2)$?

Predicado: $P(x)$: $x > 3$ con dominio $\mathbb{Z}$

Evaluación de cada caso expresión:

$\boldsymbol{P(4)}$: $P(4) = P(x = 4) = 4 > 3 \rightarrow$ **Verdadero**

$\boldsymbol{P(2)}$: $P(2) = P(x = 2) = 2 \ngtr 3 \rightarrow$ **Falso**

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 5

Sea $A(x)$ la afirmación "La computadora x esta siendo atacada por un intruso“. Suniendo que, de las computadoras del campus, solo $CS2$ y $\mathrm{MATH1}$ están siendo atacadas por intrusos. ¿Cuáles son los valores de verdad de $A(CS1)$, $A(CS2)$ y $A(\mathrm{MATH1})$?

Solución:

Predicado	$\mathrm{A}(x)$: La computadora x esta siendo atacada por un intruso
Dominio	Computadoras del campus
Conjunto de verdad	$\{\mathrm{CS2}, \mathrm{MATH1}\}$

Evaluación de cada caso expresión:

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{CS1}):\quad A(x) = A(x = \mathrm{CS1}) \rightarrow \mathrm{CS1} \notin \{\mathrm{CS2}, \mathrm{MATH1}\} \rightarrow \textbf{Falso}$$

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{CS2}):\quad A(x) = A(x = \mathrm{CS2}) \rightarrow \mathrm{CS2} \in \{\mathrm{CS2}, \mathrm{MATH1}\} \rightarrow \textbf{Verdadero}$$

$$\boldsymbol{A}(\mathbf{MATH1}):\quad A(x) = A(x = \mathrm{MATH1}) \rightarrow \mathrm{MATH1} \in \{\mathrm{CS2}, \mathrm{MATH1}\} \rightarrow \textbf{Verdadero}$$

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 6

Sea $Q(x, y)$ la afirmación "$x = y + 3$ “. ¿Cuáles son los valores de verdad de las proposiciones $Q(1,2)$ y $Q(3,0)$?

Solución:

Predicado	$Q(x, y)$: $x = y + 3$
Dominio	$\mathbb{R}$
Conjunto de verdad	$\{x, y \in \mathbb{R} \mid x = y + 3\}$

Evaluación de cada caso expresión:

$\boldsymbol{Q(2,3)}$: $Q(2,3) = Q(x = 2, y = 3) \rightarrow 2 = 3 + 3 \rightarrow 2 \neq 6 \rightarrow$ **Falso**

$\boldsymbol{Q(3,0)}$: $Q(3,0) = Q(x = 3, y = 0) \rightarrow 3 = 0 + 3 \rightarrow 3 = 3 \rightarrow$ **Verdadero**

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Resumen rápido lógica proposicional
- Introducción
- Conceptos importantes
- Ejemplos 1
- **Cuantificadores**
- Ejemplos 2
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Un poco de Prolog

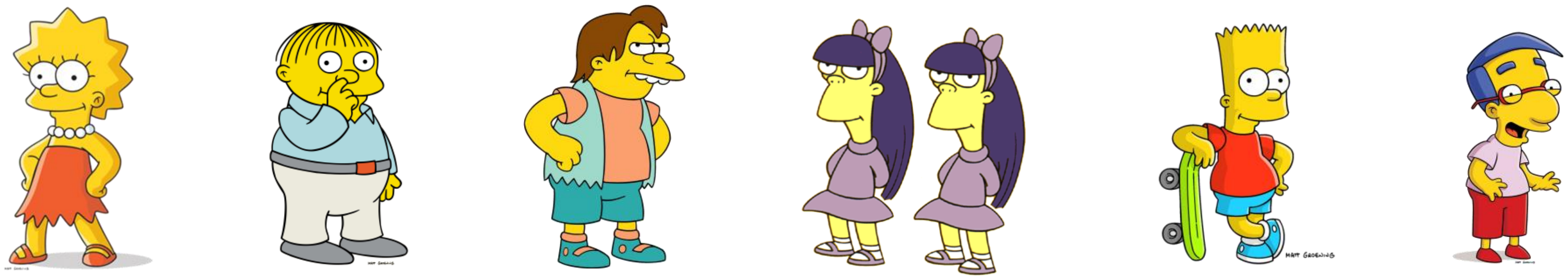
UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Cuantificadores

Definición

- El mayor cambio de la lógica proposicional a la lógica de primer orden es el uso de cuantificadores.
- Un cuantificador es una afirmación que expresa que una propiedad es verdadera para algunas o todas las opciones posibles.
- La siguiente tabla muestra la representación de un conocimiento basado en cada tipo de lógica:

Conocimiento basado en lógica proposicional	**Conocimiento basado en lógica cuantificacional**
$\mathrm{StudentLisa} \land \mathrm{StudentRafa}$ $(\mathrm{StudentLisa} \rightarrow \mathrm{PersonLisa}) \land (\mathrm{StudentRafa} \rightarrow \mathrm{PersonRafa})$ $(\mathrm{StudentLisa} \land \mathrm{CreativeLisa}) \lor (\mathrm{StudentRafa} \land \mathrm{CreativeRafa})$	$\mathrm{Student}(\mathrm{Lisa}) \land \mathrm{Student}(\mathrm{Rafa})$ $\forall x\ \mathrm{Student}(x) \rightarrow \mathrm{Person}(x)$ $\exists x\ \mathrm{Student}(x) \land \mathrm{Creative}(x)$

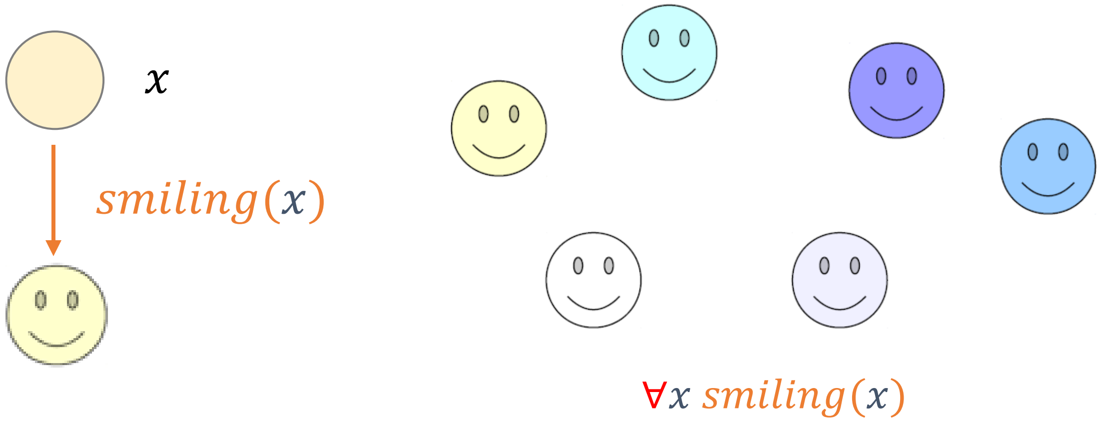


Cuantificadores

Cuantificador universal ($\forall$)

Este cuantificador afirma que la propiedad o relación que le sigue es verdadera para todos los elementos del dominio de discurso considerado.

Símbolo	$\forall$	
Lectura	"Para todo", "Para cada", "Para cualquier"	
Formato	$\forall x\ P(x)$ significa que "Para todo x, la propiedad P es verdadera para x"	
Valor de verdad	**Verdadero**	La sentencia $\forall x\ P(x)$ es **verdadera** si, y solo si, sin importar el elemento "a" del dominio que se elija, $P(a)$ es verdadero.
	Falso	Si es encuentra un elemento "a" del dominio para el que $P(a)$ es falso, la sentencia $\forall x\ P(x)$ es **falsa**.



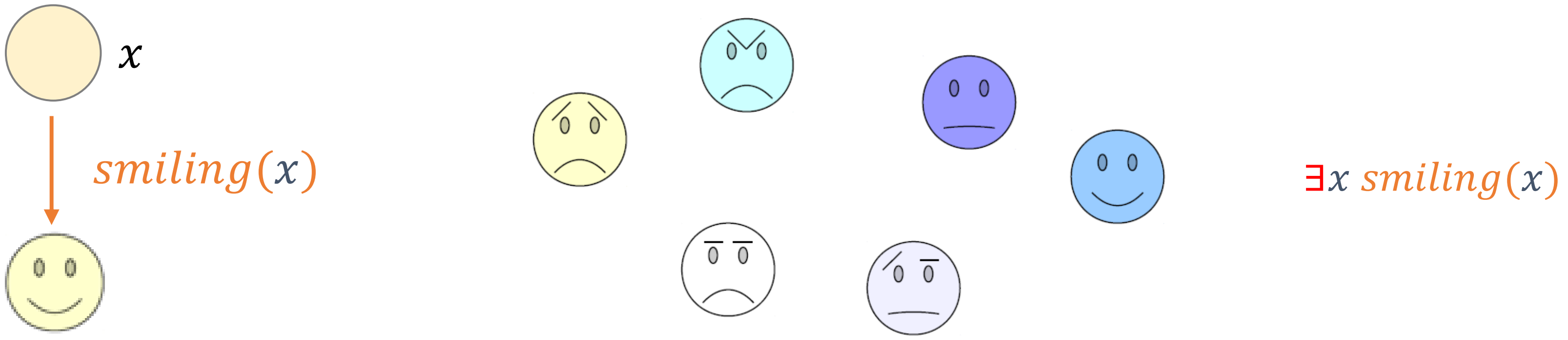
Método del contraejemplo: técnica de refutación que consiste en **encontrar un solo caso** donde una proposición que afirma que algo es siempre verdadero (es decir, usa un cuantificador universal $\forall$) **no se cumple**. Esto es encontrar un x_0 tal que $P(x_0)$ se falsa.

Cuantificadores

Cuantificador existencial (∃)

Este cuantificador afirma que hay al menos un elemento en el dominio de discurso que satisface la propiedad o relación que le sigue.

<table>
<tr><th>Símbolo</th><td colspan="2">$\exists$</td></tr>
<tr><th>Lectura</th><td colspan="2">"Existe al menos uno", "Para algún", "Hay algún".</td></tr>
<tr><th>Formato</th><td colspan="2">$\exists x\ P(x)$ significa que “Existe al menos un x tal que la propiedad P es verdadera para x”</td></tr>
<tr><th rowspan="2">Valor de verdad</th><td>Verdadero</td><td>La sentencia $\exists x\ P(x)$ es verdadera si, y solo si, se puede encontrar al menos un elemento "a" del dominio para el cual $P(a)$ es verdadero.</td></tr>
<tr><td>Falso</td><td>Si se comprueban todos los elementos y para ninguno de ellos $P(x)$ es verdadero, entonces, la sentencia $\exists x\ P(x)$ es falsa.</td></tr>
</table>



Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Resumen cuantificadores

La siguiente tabla muestra un resumen entre los cuantificadores:

Característica	Cuantificador universal ($\forall$)	Cuantificador existencial ($\exists$)
Símbolo	$\forall$	$\exists$
Lectura común	"Para todo", "Para cada", "Para cualquier"	"Existe (al menos) un", "Para algún", "Hay algún"
Significado	La propiedad es verdadera para **todos** los elementos del dominio	La propiedad es verdadera para **al menos uno** del dominio
Estructura típica	$\forall x\ P(x)$	$\exists x\ P(x)$
Condición de verdad	$P(x)$ es verdadero para todo x.	Hay algún x para el cual $P(x)$ es verdadero.
Condición de falsedad	Hay algún x para el cual $P(x)$ es falso.	$P(x)$ es falso para cada x.
Palabras claves asociadas (al lenguaje natural)	Todos, cada, cualquiera, ninguno (usado con negación), siempre, para todo.	Existe, algún, algunos, hay, al menos uno, a veces, para algún.

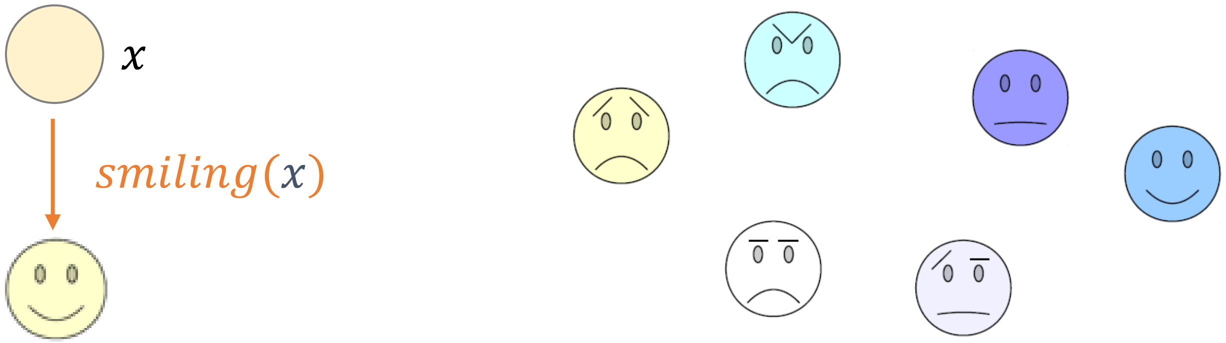
Nota importante: El valor de la verdad para cualquiera de los cuantificadores depende del dominio.

Cuantificadores

Cuantificador de unicidad ($\exists!$)

Este cuantificador que permite expresar que **existe exactamente un** elemento que cumple cierta propiedad.

Símbolo	$\exists!$	
Lectura	"Existe un único", "Existe exactamente un", "uno y solo uno".	
Formato	$\exists!\, x\ P(x)$ significa que "Existe una única x tal que la propiedad P es verdadera para x"	
Forma desarrollada	El cuantificador de unicidad no es realmente necesario ya que la restricción de que existe un x único tal que $P(x)$ se puede expresar como: $$\exists x\ \big(P(x) \land \forall y(P(y) \to y = x)\big)$$	
	Parte 1: Existencia	$\exists x\ P(x)$ - existe **al menos uno** que cumple $P(x)$
	Parte 2: Unicidad	$\forall y(P(y) \to y = x)$ - **cualquier otro** que lo cumpla debe ser igual a x



$\exists!\, x\ smiling(x)$

Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Propiedades de los cuantificadores

El valor de verdad de $\forall x\ P(x)$ y $\exists x\ P(x)$ depende tanto de la función proposicional $P(x)$ como del dominio U.

Ejemplos:

1. Si U corresponde a los enteros positivos $(\mathbb{Z}^{+})$ y $P(x)$ es el enunciado "$x < 2$", entonces $\exists x\ P(x)$ es **verdadero**, pero $\forall x\ P(x)$ es **falso**.
2. Si U corresponde a los enteros negativos $(\mathbb{Z}^{-})$ y P(x) es el enunciado "$x < 2$", entonces tanto $\exists x\ P(x)$ como $\forall x\ P(x)$ son **verdaderos**.
3. Si U consta de $3, 4$ y 5, y $P(x)$ es el enunciado "$x > 2$", entonces tanto $\exists x\ P(x)$ como $\forall x\ P(x)$ son **verdaderos**. Pero si $P(x)$ es el enunciado "$x < 2$", entonces tanto $\exists x\ P(x)$ como $\forall x\ P(x)$ son **falsos**.

Cuantificadores

Precedencia de cuantificadores

- Es el orden en que se interpretan los cuantificadores (como ∀ y ∃) cuando aparecen anidados o en combinaciones.
- Aunque los cuantificadores no tienen una "precedencia rígida" como los operadores aritméticos, su **orden importa** muchísimo porque cambia completamente el significado de una expresión.
- Los cuantificadores ∀ y ∃ tienen mayor precedencia que todos los operadores lógicos.
  - **Ejemplo 1**: $\forall x P(x) \vee Q(x)$ es la disyunción de $\forall x P(x)$ y $Q(x)$, en otras palabra esta expresión es equivalente a $\left(\forall x P(x)\right) \vee Q(x)$ y no a $\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right)$.
  - **Ejemplo 2**: Aunque las expresiones $\forall x \exists y\, P(x,y)$ y $\exists y \forall x\, P(x,y)$ tienen los mismos símbolos, no significan lo mismo.

Expresión	**Significado**
$\forall x \exists y\, P(x,y)$	Para **cada** $\boldsymbol{x}$, existe **un** $\boldsymbol{y}$ **distinto** (posiblemente) que cumple con $P(x,y)$
$\exists y \forall x\, P(x,y)$	Hay **un único** $\boldsymbol{y}$ que sirve para **todos los** $\boldsymbol{x}$

Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Cuantificadores como conjunciones y disyunciones

- En lógica de primer orden (cuantificacional), los cuantificadores tienen una relación estrecha con las conjunciones ($\wedge$) y disyunciones ($\vee$) cuando los interpretamos en **dominios finitos**.
- Estas relaciones son las siguientes:
  1. Una proposición cuantificada universalmente ($\forall$) es equivalente a una conjunción de proposiciones sin cuantificadores.
  2. Una proposición cuantificada existencialmente ($\exists$) es equivalente a una disyunción de proposiciones sin cuantificadores.
- Esta relación no se puede aplicar en dominios infinitos.

Cuantificadores

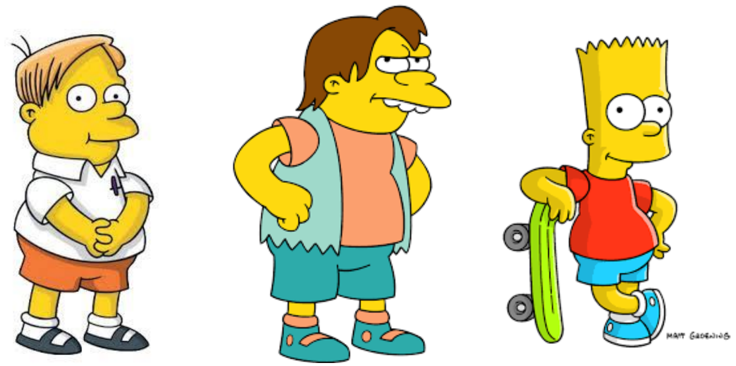
Cuantificador universal (∀) ≈ Conjunción (∧)

- El cuantificador universal $\forall x\, P(x)$ afirma que $P(x)$ es verdadero para **todos los elementos del dominio** lo cual hace que este pueda ser representado como una conjunción entre sus elementos.
- En un dominio finito $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, la equivalencia es:

$$P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n)$$

Ejemplo: Según lo anterior, si se tiene:

- Enunciado: “Todos los estudiantes aprobaron”
- Dominio: $U = \{Martin, Nelson, Bart\}$
- Predicado: $aprobo(x)$: "x aprobo“



La expresión lógica asociada al problema queda:

$$\forall x\, aprobo(x) = aprobo(Martin) \wedge aprobo(Nelson) \wedge aprobo(Bart)$$

Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

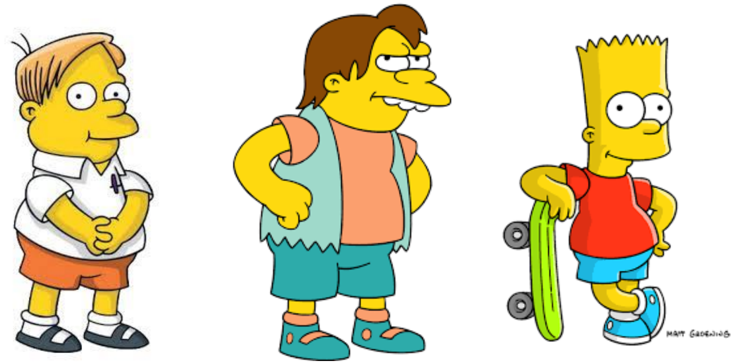
Cuantificador Existencial (∃) ≈ Disyunción (∨)

- El cuantificador existencial $\exists x\ P(x)$ afirma que **existe al menos un *x*** para el que $\mathrm{P}(x)$ es verdadero.
- En un dominio finito $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, la equivalencia es:

$$P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n)$$

Ejemplo: Según lo anterior, si se tiene:

- Enunciado: "Algunos estudiantes aprobaron"
- Dominio: $U = \{Martin, Nelson, Bart\}$
- Predicado: $aprobo(x)$: "x aprobo"



La expresión lógica asociada al problema queda:

$$\exists x\ aprobo(x) = aprobo(Martin) \vee aprobo(Nelson) \vee aprobo(Bart)$$

Cuantificadores

Relación entre los cuantificadores y los ciclos

Los cuantificadores en lógica, como ∀ (para todo) y ∃ (existe), tienen una relación directa con los ciclos (**`for`**, **`while`**) en programación. Entender esta relación ayuda a traducir ideas lógicas en código y viceversa.

- Cuando el dominio del discurso es finito, podemos pensar en la cuantificación como un bucle que recorre los elementos del dominio.
- Para evaluar $\forall x\ P(x)$, se recorre todo el x del dominio.
  - Si en cada paso $P(x)$ es verdadero, entonces $\forall x\ P(x)$ es verdadero.
  - Si en un paso $P(x)$ es falso, entonces $\forall x\ P(x)$ es falso y el bucle termina.
- Para evaluar $\exists x\ P(x)$, se recorre todo el x del dominio.
  - Si en algún paso, $P(x)$ es verdadero, entonces $\exists x\ P(x)$ es verdadero y el bucle termina.
  - Si el bucle termina sin encontrar un x para el que $P(x)$ sea verdadero, entonces $\exists x\ P(x)$ es falso.
- Incluso si los dominios son infinitos, podemos pensar en los cuantificadores de esta manera, pero los bucles no terminarán en algunos casos.

Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación entre los cuantificadores y los ciclos

La siguiente tabla comparativa resume la relación:

Cuantificador lógico	**Equivalente en programación**	**Descripción**
Cuantificador universal (∀)	Bucle `for` que **verifica todos** los casos	Recorre todos los elementos y verifica que **todos cumplan** una condición
Cuantificador existencial (∃)	Bucle `for` con `if` y `break` al encontrar	Recorre hasta encontrar **al menos un caso** que cumpla la condición
Negación de ∃ $(\neg\exists x\, P(x))$	Bucle que asegura que **ningún caso** cumpla	Verifica que **ningún elemento** cumpla la propiedad
Cuantificador de unicidad (∃!)	Bucle con un **contador** de ocurrencias	Asegura que **exactamente uno** cumpla la condición
Cuantificadores anidados	Bucles anidados (`for` dentro de `for`)	Se usan cuando hay relaciones entre pares o combinaciones de elementos

Cuantificadores

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Relación entre los cuantificadores y los ciclos

Anotación importante: Los **cuantificadores** describen operaciones lógicas abstractas sobre un conjunto. Los **bucles** en programación implementan esas operaciones de forma concreta.

Ejemplos

A continuación se muestran algunos ejemplos donde se resalta la relación

Ejemplo 1 - $\forall x \in S, P(x)$:

Verificar que **todos los elementos cumplen** una condición:

```
todos_cumplen = True
for x in S:
    if not P(x):
        todos_cumplen = False
        break
```

Ejemplo 1 con caritas: link

Ejemplo 2 - $\exists x \in S, P(x)$:

Verificar que **al menos uno** cumple la condición:

```
existe = False
for x in S:
    if P(x):
        existe = True
        break
```

Ejemplo 2 con caritas: link

Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación entre los cuantificadores y los ciclos

Ejemplos

Ejemplo 3 - $\exists!\, \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$:

Verificar que **exactamente uno** cumple la condición:

```
contador = 0
for x in S:
    if P(x):
        contador += 1
unico = (contador == 1)
```

Ejemplo 3 con caritas: link

Ejemplo 4 - $\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}, \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$:

Cuantificadores anidados: "Para todo x, existe un y..."

```
valido = True
for x in A:
    encontrado = False
    for y in B:
        if R(x, y):
            encontrado = True
            break
    if not encontrado:
        valido = False
        break
```

Agenda

- Resumen rápido de lógica proposicional
- Introducción
- Conceptos importantes
- Ejemplos 1
- Cuantificadores
- **Ejemplos 2**
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Un poco de Prolog

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enunciados

1. **Verdad y falsedad de los enunciados universales**.
   a. Sea $D = \{1,2,3,4,5\}$ y considere el enunciado:

$$\forall x \in D, x^2 \geq x$$

   Demuestre que el enunciado es verdadero.

   b. Considere el enunciado.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$$

   Encuentre un contraejemplo para demostrar que este enunciado es falso.

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enunciados

2. **Verdad y falsedad de los enunciados existenciales**.
   a. Considere el enunciado:

   $$\exists m \in \mathbb{Z}^{+}, \text{tal que } m^2 = m$$

   Demuestre que el enunciado es verdadero.

   b. Sea $E = \{5,6,7,8\}$ y considere el enunciado:

   $$\exists m \in E, \text{tal que } m^2 = m$$

   Demuestre que el enunciado es falso.

3. Sea $P(x)$ la afirmación "$x + 1 > x$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x\ P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Ejemplos 2

Enunciados

4. Sea $Q(x)$ la afirmación "$x < 2$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x\, P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?
5. ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x\, P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?
6. ¿Qué significa la afirmación $\forall x\, N(x)$ si $N(x)$ es "$\text{La computadora } x \text{ esta conectada a la red}$" y el dominio consta de todas las computadoras del campus?
7. ¿Cuál es el valor de verdad de $\forall x\, (x^2 \geq x)$ si el dominio está compuesto por todos los números reales? ¿Cuál es el valor de verdad de esta afirmación si el dominio está compuesto por todos los números enteros?
8. Sea $P(x)$ la afirmación "$x > 3$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x\, P(x)$, donde el dominio está compuesto por todos los números reales?
9. Sea $Q(x)$ el enunciado "$x = x + 1$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x\, Q(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1 - Solución

1. **Verdad y falsedad de los enunciados universales.**
   a. Sea $D = \{1,2,3,4,5\}$ y considere el enunciado:

$$\forall x \in D, x^2 \geq x$$

   Demuestre que el enunciado es verdadero.

   b. Considere el enunciado.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$$

   Encuentre un contraejemplo para demostrar que este enunciado es falso.

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1 - Solución

a. Sea $D = \{1,2,3,4,5\}$ y considere el enunciado:

$$\forall x \in D, x^2 \geq x$$

Demuestre que el enunciado es verdadero.

Solución:

Se debe cumplir que $x^2 \geq x$ deber ser verdadero para todo valor de x en $D = \{1,2,3,4,5\}$

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x^2 \geq x}$	**Valor de verdad**
1	$1^2 \geq 1 \rightarrow 1 \geq 1$	Verdadero
2	$2^2 \geq 2 \rightarrow 4 \geq 2$	Verdadero
3	$3^2 \geq 3 \rightarrow 9 \geq 3$	Verdadero
4	$4^2 \geq 4 \rightarrow 16 \geq 4$	Verdadero
5	$5^2 \geq 5 \rightarrow 25 \geq 5$	Verdadero

Por lo tanto $\forall x \in D, x^2 \geq x$ es **verdadero**

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1 - Solución

b. Considere el enunciado.

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$$

Encuentre un contraejemplo para demostrar que este enunciado es falso.

Solución:

Contraejemplo: Teniendo en cuenta que para los reales $x \in (-\infty, +\infty)$ si se selecciona $x = x_0 = \frac{1}{2}$, se tiene que:

$$P(x) = P\left(x = \frac{1}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{4} \ngeq \frac{1}{2} \rightarrow \textbf{Falso}$$

Por lo tanto, "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$" es **falso**.

Ejemplos 2

Ejemplo 2 - Solución

2. **Verdad y falsedad de los enunciados existenciales**.
   a. Considere el enunciado:

$$\exists m \in \mathbb{Z}^+, \text{tal que } m^2 = m$$

   Demuestre que el enunciado es verdadero.

   b. Sea $E = \{5,6,7,8\}$ y considere el enunciado:

$$\exists m \in E, \text{tal que } m^2 = m$$

   Demuestre que el enunciado es falso.

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2 - Solución

a. Considere el enunciado:

$$\exists m \in \mathbb{Z}^+, \text{tal que } m^2 = m$$

Demuestre que el enunciado es verdadero.

Solución:

Con que se cumpla un solo caso en el domino de los enteros positivos $(m \in \{1,2,3,\ldots\})$ el cual la expresión $m^2 = m$ se cumple el enunciado. Si se toma $m = 1$, tenemos que:

$$m^2 = m \rightarrow 1^2 = 1 \rightarrow 1 = 1 \rightarrow \textbf{Verdadero}$$

Por lo tanto, el enunciado "$\exists m \in \mathbb{Z}^+, \text{tal que } m^2 = m$" es **verdadero**.

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2 - Solución

b. Sea $E = \{5,6,7,8\}$ y considere el enunciado:

$$\exists m \in E, \text{tal que } m^2 = m$$

Demuestre que el enunciado es falso.

Solución:

En la siguiente tabla se evalúan todos los valores del dominio que toma m:

$\boldsymbol{m}$	$\boldsymbol{m^2 = m}$	**Valor de verdad**
5	$5^2 = 5 \rightarrow 25 \neq 5$	Falso
6	$6^2 = 6 \rightarrow 36 \neq 6$	Falso
7	$7^2 = 7 \rightarrow 49 \neq 7$	Falso
8	$8^2 = 8 \rightarrow 64 \neq 8$	Falso

Como el enunciado es falso para todos los valores de m dentro del dominio E, entonces el enunciado "$\exists m \in E, \text{tal que } m^2 = m$“ es **falso**.

Ejemplos 2

Ejemplo 3 - Solución

Sea $P(x)$ la afirmación "$x+1>x$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x\,P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Solución:

El objetivo consiste en demostrar que el enunciado $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x+1>x$ es verdadero. Teniendo en cuenta que para los reales $x \in (-\infty, +\infty)$ entonces:

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{x+1>x}$	**Valor de verdad**
-10	$-10+1>-10 \rightarrow -9>-10$	Verdadero
-0.1	$-0.1+1>-0.1 \rightarrow 0.9>-0.1$	Verdadero
0	$0+1>0 \rightarrow 1>0$	Verdadero
1	$1+1>1 \rightarrow 2>1$	Verdadero
10	$10+1>10 \rightarrow 11>10$	Verdadero

Resolviendo la desigualdad:

$$x+1>x$$

$$\cancel{x}+1>\cancel{x}$$

$$1>0$$

Vemos que el resultado siempre es verdadero, luego el enunciado "$\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $x+1>x$" es verdadero.

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 4 - Solución

4. Sea $Q(x)$ la afirmación "$x < 2$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x\ Q(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Solución:

Teniendo en cuenta que $Q(x): x < 2$ el objetivo consiste en demostrar que $\forall x\ P(x)\ , x < 2$ es verdadero.

Para empezar si $x \in \mathbb{R}$, entonces $-\infty < x < +\infty$, luego mediante un **contraejemplo** si seleccionamos un valor $x = x_0 = 2$ podemos demostrar que $Q(x_0)$ es falsa tal y como se muestra a continuación:

$$Q(x_0) = Q(x = x_0) = Q(2) = 2 < 2 \rightarrow 2 \nless 2 \rightarrow \text{Falso}$$

De modo que por contradicción, la expresión $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x)$ es **falsa**.

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo 5 - Solución

5. Supongamos que $P(x)$ es "$x^2 > 0$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\forall x\ P(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Solución:

Teniendo en cuenta que $P(x): x^2 > 0$ el objetivo consiste en demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ es verdadero.

Para empezar si $x \in \mathbb{R}$, entonces $-\infty < x < +\infty$, luego mediante un **contraejemplo** si seleccionamos un valor $x = x_0 = 0$ podemos demostrar que $Q(x_0)$ es falsa tal y como se muestra a continuación:

$$P(x_0) = P(x = x_0) = P(0) = 0^2 > 0 \rightarrow 0 \ngtr 0 \rightarrow \text{Falso}$$

De modo que por contradicción, la expresión $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)$ es **falsa**.

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 6 - Solución

6. ¿Qué significa la afirmación $\forall x\ N(x)$ si $N(x)$ es $\text{"La computadora } x \text{ esta conectada a la red"}$ y el dominio consta de todas las computadoras del campus?

Solución:

La siguiente tabla resume la información que se puede obtener del enunciado:

Variable	x: Computadora individual (del campus)
Predicado	$N(x)$: "La computadora x esta conectada a la red"
Dominio de discurso	Todas las computoras del campus
Expresión lógica	$\forall x \in \text{Campus}, N(x)$

Con base en la tabla anterior, podemos decir que $\forall x\ N(x)$ significa que "Para todo computador x en el campus, ese computador x esta conectado a la red“, o en otras palabras "Todas las computadoras del campus conectadas a la red“

Ejemplos 2

Ejemplo 7

7. ¿Cuál es el valor de verdad de $\forall x\ (x^2 \geq x)$ si el dominio está compuesto por todos los números reales? ¿Cuál es el valor de verdad de esta afirmación si el dominio está compuesto por todos los números enteros?

Solución:

Parte 1: Mediante el uso de un **Contraejemplo** al tener en cuenta que para los reales $x \in (-\infty, +\infty)$ si se selecciona $x = x_0 = \frac{1}{2}$, se tiene que:

$$P(x) = P\left(x = \frac{1}{2}\right) \to \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \to \frac{1}{4} \ngeq \frac{1}{2} \to \textbf{Falso}$$

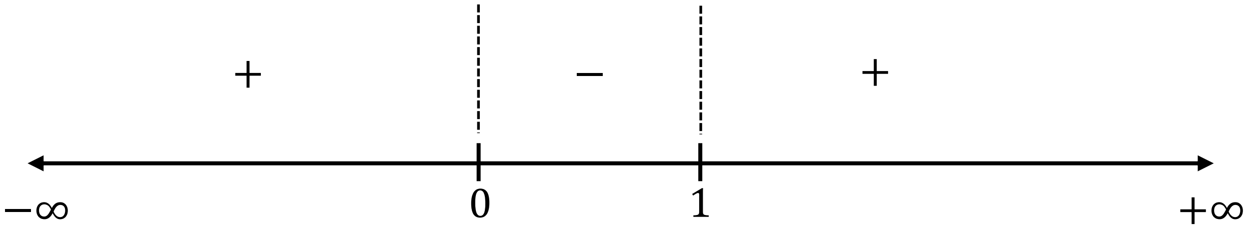
Por lo tanto, "$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$" es **falso**.

Sin embargo, si resolviéramos la desigualdad llegaríamos a la siguiente conclusión:

$$x^2 \geq x$$

$$x^2 - x \geq 0$$

$$x(x-1) \geq 0$$



Valores criticos: $x = 0, x = 1$

Conjunto solución: $(-\infty, 0] \cup [1, +\infty) \equiv \mathbb{R} - (0,1)$

Ejemplos 2

Ejemplo 7

7. ¿Cuál es el valor de verdad de $\forall x\ (x^2 \geq x)$ si el dominio está compuesto por todos los números reales? ¿Cuál es el valor de verdad de esta afirmación si el dominio está compuesto por todos los números enteros?

Solución (Continuación):

De modo que yendo un poco mas allá del contraejemplo, la sentencia $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$ es falsa para todos los reales por que la expresión $x^2 \geq x$ es falsa en el rango $(0,1)$.

Parte 2: En el segundo punto nos preguntan para que valores de x el enunciado $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq x$ es verdadero (es decir que el dominio del discurso cambia de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$). La expresión es verdadera, por que en el rango de valores donde la desigualdad es invalida $(0,1)$ no hay enteros. De modo que llegamos a la conclusión de que $\forall x \in \mathbb{Z}, x^2 \geq x$ es **verdadera** en el dominio de los enteros.

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 8

8. Sea $P(x)$ la afirmación "$x > 3$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x\ P(x)$, donde el dominio está compuesto por todos los números reales?

Solución:

Con que se cumpla un solo caso en el dominio de los reales el cual la expresión $x > 3$ se cumple el enunciado de que $\exists x\ P(x)$ es verdadero. Si se toma $x = 4$, tenemos que:

$$x > 3 \rightarrow 4 > 3 \rightarrow \mathbf{Verdadero}$$

Por lo tanto, el enunciado "$\exists m \in \mathbb{R}, x > 3$" es **verdadero**.

Ejemplos 2

Ejemplo 9

9. Sea $Q(x)$ el enunciado "$x = x + 1$". ¿Cuál es el valor de verdad de la cuantificación $\exists x\ Q(x)$, donde el dominio consiste en todos los números reales?

Solución:

En este caso no existen ningún real x para el cual $Q(x)$ sea verdadero, por lo tanto, el cuantificador existencial $\exists x\ Q(x)$ es **falso**.

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Resumen rápido de lógica proposicional
- Introducción
- Conceptos importantes
- Ejemplos 1
- Cuantificadores
- Ejemplos 2
- **Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal**
- Un poco de Prolog

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

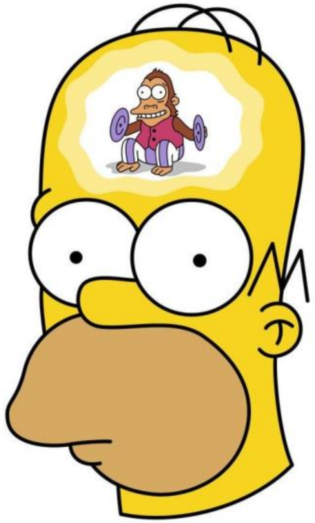
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos claves

- Es importante poder traducir del lenguaje informal al formal cuando se trata de dar sentido a conceptos matemáticos nuevos.
- También, es igualmente importante poder traducir del lenguaje informal al formal cuando se analiza un problema complicado.

Sin Tele y sin cerveza Homero pierde la cabeza

$$(\neg\exists x C(x) \land \neg\exists y T(y)) \rightarrow P(h)$$



Funciones proposicionales
• $C(x)$: "x es cerveza" • $T(y)$: "y es tele" • $P(z)$: "z pierde la cabeza"
Afirmaciones
• $P(h)$: "Homero pierde la cabeza"

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Traducción de lenguaje natural a expresiones en lógica cuantificacional

A continuación se listan algunos pasos para traducir enunciados del lenguaje natural a lógica de primer orden:

1. **Leer y comprender el enunciado completo**: Antes de traducir, asegúrese de entender el significado exacto del enunciado.
2. **Identificar el dominio del discurso**: Defina sobre qué tipo de objetos se está hablando: personas, números, animales, ciudades, etc.
   - **Ejemplo**: "Todos los perros ladran" → **dominio**: *animales*, específicamente *perros*.
3. **Determinar las constantes y variables**:
   - **Constantes**: nombres propios o entidades específicas (ej. "Sofía", "Medellín", "3").
   - **Variables**: letras como x, y, z que representan elementos genéricos del dominio.
4. **Identificar los predicados**: Los predicados expresan propiedades o relaciones entre objetos.
   - **Ejemplos:**
     - **"Es un perro"**: $perro(x)$
     - **"Ladra"**: $ladra(x)$
     - **"Es mayor que"**: $mayor\_que(x, y)$

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Traducción de lenguaje natural a expresiones en lógica cuantificacional

5. **Traducir conectores lógicos**: Reemplace las palabras del lenguaje natural por conectores lógicos.

Expresión	Conector
No	$\neg$
Y	$\wedge$
O	$\vee$
Si … entonces …	$\rightarrow$
Si y solo si …	$\leftrightarrow$

6. **Detectar cuantificadores**:

Expresión	Conector
"Todos", "Cada", "Cualquier"	
"Existe", "Hay", "Alguno"	

7. **Armar la fórmula**: Construir la formula con los elementos anteriores.
8. **Verificar la fidelidad de la traducción**: Revise la fórmula y compare su significado con el enunciado original. Ajuste si es necesario.

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

Ejemplo

Traduzca el enunciado “Todo estudiante de lógica es curioso” a lógica de primer orden.

Solución:

Dominio	Personas
Variables	x
Constantes	---
Predicados	• $EstudianteDeLogica(x)$ • $Curioso(x)$
Cuantificadores	$\forall$

$$\underbrace{\text{Todo}}_{\forall}\ \underbrace{\underbrace{\overbrace{\text{estudiante}}^{\text{personas}}}_{x}\ \text{de lógica}}_{EstudianteDeLogica(x)}\ \underbrace{\text{es curioso}}_{Curioso(x)}$$

$$\Big\downarrow \ \text{Expresión lógica}$$

Expresión lógica: $\forall x\big(EstudianteDeLogica(x) \rightarrow Curioso(x)\big)$

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

Enunciados

1. Reescriba los siguientes enunciados formales en diferentes formas equivalentes pero de manera más informal. No utilice el símbolo ∀ o ∃.
   a. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
   b. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1$
   c. $\exists m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m^2 = m$
2. Reescriba los enunciados siguientes de tal forma que el cuantificador siga al resto de la frase.
   a. Para cualquier n, $2n$ es par.
   b. Existe al menos un numero real x tal que $x^2 \leq 0$
3. Reescriba cada uno de los siguientes enunciados formalmente. Use cuantificadores y variables.
   1. Todos los triángulos tienen tres lados.
   2. Ningún perro tiene alas.
   3. Algunos programas están estructurados.

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enunciados

4. Sean:

$$U = \{x | x \text{ es un habitante del continente africano}\}$$
$$\boldsymbol{p}: \text{"Hablan frances"}$$

Si $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$: "$x$ habla frances“

Escriba en lenguaje informar las siguientes expresiones formales:

- $\forall x \; p(x)$
- $\exists x \; p(x)$

5. Traduzca la siguiente oración a lógica de predicados: “Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java”.
6. Traduzca la siguiente oración a lógica de predicados: “Algún estudiante de esta clase ha tomado un curso de Java”.

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

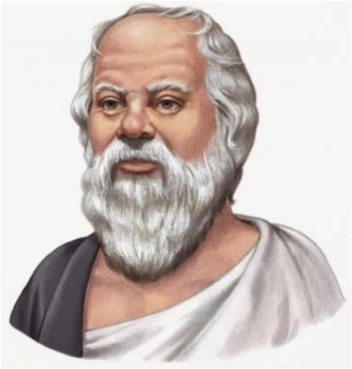
UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Enunciados

7. Tenemos las siguientes premisas:
    - “Todos los hombres son mortales”
    - “Sócrates es un hombre”

   Y la siguiente conclusión: “Sócrates es Mortal”

   ¿Como es la representación en lógica cuantificacional de las premisas y la conclusión?



Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1 - Solución

1. Reescriba los siguientes enunciados formales en diferentes formas equivalentes pero de manera más informal. No utilice el símbolo ∀ o ∃.
    a. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$
    b. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1$
    c. $\exists m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m^2 = m$

Solución: En la siguiente tabla se resumen los resultados:

Numeral	Lenguaje formal	Lenguaje informal
a	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$	• **Todos** los números reales tienen cuadrados no negativos. • **Todo** numero real tiene un cuadrado no negativo • **Cualquier** numero real tiene un cuadrado no negativo. • El cuadrado de **todo** numero real es no negativo.
b	$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \neq 1$	• **Todos** los números reales tienen cuadrados que no son iguales a -1. • **No hay** números reales que tengan cuadrados iguales a -1. **Nota importante**: Las palabras ***ninguno es*** o ***no … son*** son equivalentes a las palabras ***todos no son***).
c	$\exists m \in \mathbb{Z}^+$ tal que $m^2 = m$	• **Hay** un entero positivo cuyo cuadrado es igual a si mismo. • **Se puede encontrar** al menos un numero entero positivo igual a su propio cuadrado • **Algún** entero positivo es igual a su propio cuadrado. • **Algunos** números enteros positivos son iguales a sus propios cuadrados.

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2 - Solución

2. Reescriba los enunciados siguientes empleando lenguaje formal.
   a. Para cualquier n, $2n$ es par.
   b. Existe al menos un numero real x tal que $x^2 \leq 0$

Solución: En la siguiente tabla se resumen los resultados:

Numeral	Lenguaje informal	Lenguaje formal
a	Para cualquier n, $2n$ es par	• **Dominio**: Enteros. • **Predicado**: $P(x)$: "x es par" $\forall n \in \mathbb{Z}, 2n \text{ es par} \equiv \forall n \in \mathbb{Z}, P(2n)$
b	Existe al menos un numero real x tal que $x^2 \leq 0$	• **Dominio**: Reales. • **Predicado**: $Q(x)$: "$x^2 \leq 0$" $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0 \equiv \exists x \in \mathbb{R}, Q(x)$

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 3 - Solución

3. Reescriba cada uno de los siguientes enunciados formalmente. Use cuantificadores y variables.
    a. Todos los triángulos tienen tres lados.
    b. Ningún perro tiene alas.
    c. Algunos programas están estructurados.

Solución: En la siguiente tabla se resumen los resultados:

Numeral	Lenguaje informal	Lenguaje formal	
a	Todos los triángulos tienen tres lados	• **Dominio**: - F: *Es el conjunto de todos los triangulos* • **Predicados**: - $T(x)$: "x es un triangulo“ - $L_3(x)$: "x tiene tres lados“	$\forall x\big(T(x) \rightarrow L_3(x)\big)$
b	Ningún perro tiene alas	• **Dominio**: - S: *Animales* • **Predicados**: - $P(x)$: "x es un perro“ - $A(x)$: "x tiene alas“	$\forall x\big(P(x) \rightarrow \neg A(x)\big)$ $\neg\exists x\big(P(x) \wedge A(x)\big)$

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 3 - Solución

3. Reescriba cada uno de los siguientes enunciados formalmente. Use cuantificadores y variables.
   a. Todos los triángulos tienen tres lados.
   b. Ningún perro tiene alas.
   c. Algunos programas están estructurados.

Solución: En la siguiente tabla se resumen los resultados:

Numeral	Lenguaje informal	Lenguaje formal	
c	Algunos programas están estructurados.	• **Dominio**: - $S: Programas$ • **Predicados**: - $P(x)$: "x es un programa" - $E(x)$: "x esta estructurado"	$\exists x\big(P(x) \land E(x)\big)$

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

Ejemplo 4 - Solución

4. Sean:

$$U = \{x | x \text{ es un habitante del continente africano}\}$$
$$\boldsymbol{p}: \text{"Hablan frances"}$$

Si $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$: "$x$ habla frances"

Escriba en lenguaje informar las siguientes expresiones formales:

a. $\forall x\, p(x)$

b. $\exists x\, p(x)$

Solución: En la siguiente tabla se resumen los resultados:

Numeral	Lenguaje formal	Lenguaje informal
a	$\forall x\, p(x)$	Todos los africanos hablan francés.
b	$\exists x\, p(x)$	Algunos africanos hablan francés.

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 5 - Solución

5. Traduzca la siguiente oración a lógica de predicados: “Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java”.

Solución 1:

Dominio	U: Todos los estudiantes de esta clase
Variables	x
Constantes	---
Predicados	• $J(x)$: "x ha tomado clade de Java"
Cuantificadores	$\forall$

Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java

Expresión lógica

$$\forall x J(x)$$

Solución 2:

Dominio	U: Todas personas
Variables	x
Constantes	---
Predicados	• $S(x)$: x es estudiante de esta clase • $J(x)$: x ha tomado clade de Java
Cuantificadores	$\forall$

Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java

Expresión lógica

$$\forall x\big(S(x) \rightarrow J(x)\big)$$

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 6 - Solución

6. Traduzca la siguiente oración a lógica de predicados: "Algún estudiante de esta clase ha tomado un curso de Java".

Solución 1:

Dominio	U: Todos los estudiantes de esta clase
Variables	x
Constantes	---
Predicados	• $J(x)$: "x ha tomado clade de Java"
Cuantificadores	$\exists$

Algún estudiante de esta clase ha tomado un curso de Java

Expresión lógica

$$\exists x J(x)$$

Solución 2:

Dominio	U: Todas personas
Variables	x
Constantes	---
Predicados	• $S(x)$: x es estudiante de esta clase • $J(x)$: x ha tomado clade de Java
Cuantificadores	$\exists$

Algún estudiante de esta clase ha tomado un curso de Java

Expresión lógica

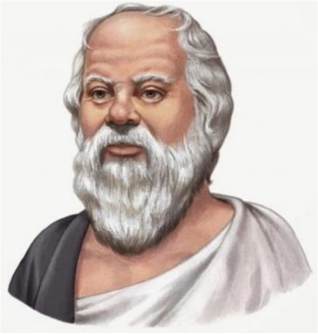
$$\exists x \big(S(x) \land J(x)\big)$$

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 7 - Solución

7. Tenemos las siguientes premisas:
   - "Todos los hombres son mortales"
   - "Sócrates es un hombre"



Y la siguiente conclusión: "Sócrates es Mortal"

¿Como es la representación en lógica cuantificacional de las premisas y la conclusión?

Solución: En la siguiente tabla se resumen los resultados:

Dominio	U: Todas personas
Variables	x
Constantes	$Socrates$
Predicados	• $Man(x)$: x es un hombrel • $Mortal(x)$: x es mortal
Cuantificadores	$\forall$

	Lenguaje informal	**Lenguaje Formal**
Premisas	"Todos los hombres son mortales"	$\forall x\big(Man(x) \rightarrow Mortal(x)\big)$
	"Sócrates es un hombre"	$Man(Socrates)$
Conclusión	Sócrates es Mortal	$Mortal(Socrates)$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- Introducción
- Validación de argumentos
- Reglas de inferencia
- Ejemplos 1
- Cuantificadores
- Ejemplos 2
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- **Un poco de Prolog**

Un poco de Prolog

Enunciados

- **Prolog** (acrónimo de PROgramming in LOGic) es un lenguaje de programación declarativo, Lenguaje declarativo basado en lógica de predicados de primer orden.
- Desarrollado en los años 70 por A. Colmerauer y P. Roussel para aplicaciones en inteligencia artificial.
- En lugar de decirle a la máquina **cómo hacer algo** (lenguajes imperativos), se le dice **qué es verdadero** (lenguajes declarativos).
- Para poder trabajar con Prolog debe tener conocimientos de lógica de predicados.
- Para usar prolog, puede instalarlo (link) o ejecutarlo online (link). La recomendación es que los instale.

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Estructura básica de Prolog

- **Prolog** se basa en tres pilares fundamentales: hechos, reglas y consultas. Cada uno representa un nivel de conocimiento o razonamiento dentro del sistema lógico.
  - **Hechos**: Información conocida:

Predicados
• $profesor(p, g)$: p es profesor del grado g • $estudiante(e, g)$: e es estudiante del grado g

$$profesor(\text{edna}, \text{cuarto}) \longrightarrow \texttt{profesor(edna, cuarto)}$$

$$profesor(\text{elizabeth}, \text{segundo}) \longrightarrow \texttt{profesor(elizabeth, segundo)}$$

$$estudiante(\text{bart}, \text{cuarto}) \longrightarrow \texttt{estudiante(bart, cuarto)}$$

$$estudiante(\text{lisa}, \text{segundo}) \longrightarrow \texttt{estudiante(lisa, segundo)}$$

  - **Reglas**: Relación entre hechos:

Predicados
• $da\_clase(p, e)$: p le enseña a e

$$\forall p \forall c \forall s \; (profesor(p, g) \wedge estudiante(e, g) \rightarrow da\_clase(p, e)) \longrightarrow \texttt{da\_clase(p, e) :- profesor(p,g),estudiante(e,g)}$$

  - **Consultas**: Preguntas al sistema:

Consulta	**Instrucción**	**Resultado**
¿Edna es profesora de Bart?	`?- da_clase(edna, bart)`	`true`
¿Cuáles son los alumnos de Elizabeth?	`?- da_clase(elizabeth, Est)`	`Est = lisa`

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Hechos (Facts)

- Representan **conocimientos atómicos** que el sistema asume como verdaderos sin necesidad de demostración. Se escriben como **predicados con argumentos**.
- **Sintaxis**:

```
predicado(arg1, arg2, ..., argN).
```

- **Ejemplo**:

```
padre(homero, bart).
madre(marge, bart).
padre(homero, lisa).
madre(marge, lisa).
padre(homero, maggie).
madre(marge, maggie).
```

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Reglas (Rules)

- Expresan relaciones **condicionales** entre hechos. Se definen con `:-` (se lee “si” o “tal que”) y permiten la inferencia lógica.
- **Sintaxis**:

```
conclusion :- condicion1, condicion2, ..., condicionN.
```

- **Ejemplo**:

```
hermano(X, Y) :- padre(P, X), padre(P, Y), madre(M, X), madre(M, Y), X \= Y.
```

Un poco de Prolog

Consultas (Queries)

- Permiten al usuario hacer **preguntas** al sistema. Prolog intentará deducir si esas preguntas son verdaderas o encontrar valores que las satisfacen..
- **Sintaxis**:

```
?- consulta.
```

- **Ejemplo**:

```
?- padre(homero, lisa).
?- madre(marge, bart).
?- madre(M, homero).
?- hermano(maggie, B).
?- hermano(nelson, bart).
```

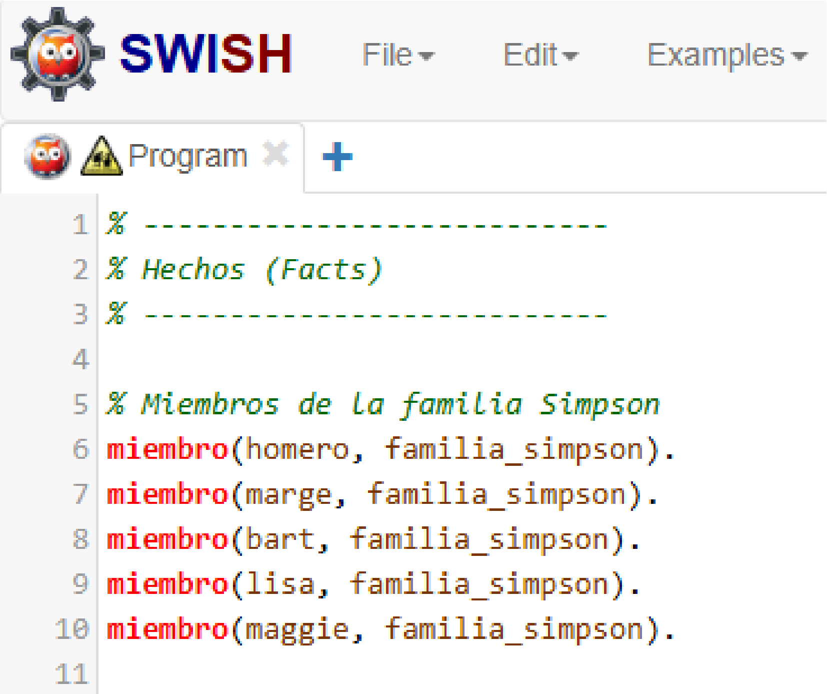
Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

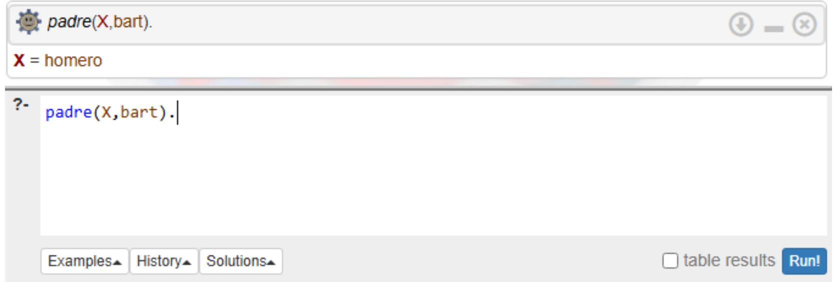
Template de Prolog

- A continuación se muestra el template básico de un programa en Prolog

```
% ---------------------------
% Hechos (Facts)
% ---------------------------

hecho1(argumentos).
hecho2(argumentos).
...

% ---------------------------
% Reglas (Rules)
% ---------------------------

regla1(X, Y) :- condicion1(X, Y), condicion2(X, Y).
...
```




```
% ---------------------------
% Consultas (Queries)
% ---------------------------

% Las consultas no se escriben en el archivo .pl,
% se ejecutan desde el intérprete con ?-
```



Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos claves

A continuación se listan algunos conceptos claves para abordar el manejo de Prolog:

- Componentes básicos: A partir de estos se construyen los términos complejos.
  - Atomos
  - Numeros
  - Variables

- Terminos complejos: Estructuras compuestas.

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos claves

Atoms (Átomos):

- Secuencia de caracteres de letras mayúsculas, minúsculas, dígitos o guiones bajos, que comienza con una letra minúscula.

```
butch, big_kahuna_burger, playGuitar
```

- Una secuencia arbitraria de caracteres entre comillas simples

```
'Vincent', 'Five dollar shake', '@$%'
```

- Una secuencia de caracteres especiales:

```
: , ; . :-
```

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Conceptos claves

Variables:

- Secuencia de caracteres de letras mayúsculas, minúsculas, dígitos o guion bajo, que comienza con una letra mayúscula o un guion bajo.

```
X, Y, Variable, Vincent, _tag
```

Numeros:

- **Enteros**:

```
12, -34, 22342
```

- **Flotantes**:

```
34573.3234, 0.3435
```

Un poco de Prolog

Conceptos claves

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Termino complejo (complex term):

- Los átomos, los números y las variables son componentes básicos de los términos complejos.
- Los términos complejos se construyen a partir de un **functor** (identificador o nombre del termino complejo) seguido directamente de una secuencia de argumentos.
  - Los argumentos se colocan entre paréntesis, separados por comas.
  - El funtor debe ser un átomo.
  - El numero de argumentos de un termino complejo se conoce como **aridad**.

```
functor(arg1, arg2, ..., argN)
```

- En la siguiente tabla se muestran algunos ejemplos de términos complejos:

Termino complejo	**Functor / aridad**
`padre(homero, bart)`	`padre / 2`
`persona(nombre, edad)`	`persona / 2`
`color(rojo)`	`color / 2`
`suma(2,3)`	`suma / 2`
`hide(X,father(father(father(butch))))`	`hide / 2`

Un poco de Prolog

Prolog y la logica

- Como su nombre lo dice, Prolog algo tiene que ver con la lógica:

Operator	Prolog	Lógica
Implicación	`A :- B`	$B \rightarrow A$
Conjunción	`A,B`	$A \wedge B$
Disyunción	`A;B`	$A \vee B$
Negación	*Ver anotación*	$\neg A$

- Prolog no tiene la negación logica clasica como en matemáticas, en su lugar, la negación se representa como **negation as failure** que se escribe como el operador `\+ (objetivo)`

```
gusta(lisa, jazz).

?- \+ gusta(lisa, rock).
true.

?- \+ gusta(lisa, jazz).
false.
```

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Principales comandos de interacción para primíparos

A continuación se listan los principales comandos y conceptos básicos que una persona que recién empieza con Prolog debe saber:

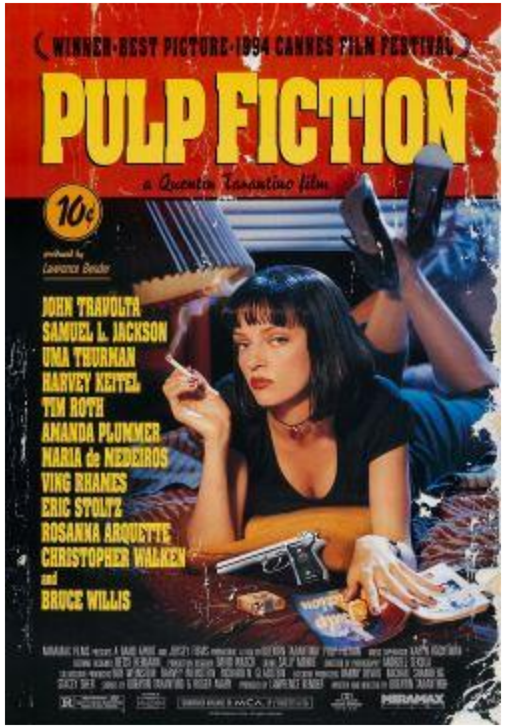
Categoría	Comando / Ejemplo	Descripción breve
Cargar código	`consult('archivo.pl').[archivo].`	Carga el archivo .pl con hechos y reglas.
Definir hecho	`padre(homero, bart).`	Declara que Homero es padre de Bart.
Definir regla	`abuelo(X, Z) :- padre(X, Y), padre(Y, Z).`	Declara una regla lógica con variables.
Consulta básica	`?- padre(homero, bart).`	Pregunta si Homero es padre de Bart.
Consulta con variable	`?- padre(homero, X).`	Pregunta: ¿a quién es padre Homero?
Negación	`?- \+ padre(lisa, X).`	Verifica que Lisa no sea padre de alguien.
Operación aritmética	`X is 2 + 3.`	Evalúa expresión y asigna a X.
Comparación numérica	`5 =:= 2 + 3.`	Compara valores aritméticamente.
Ver predicados	`listing.listing(padre).`	Muestra todos o uno solo de los predicados definidos.
Salir de Prolog	`halt. o Ctrl + D`	Cierra el intérprete.

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

En la documentación oficial de Prolog (link) hay mucho material para aprender y profundizar en este lenguaje. El siguiente ejemplo, se toma de la siguiente diapositiva y lo único que se hace es dar un poco de contexto para mirar como se conecta con lo que se ha visto en la teoría. Vamos a la película: Pulp Fiction (link)



Documental: Pulp Fiction, la obra maestra de Tarantino, 30 años después (link)

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

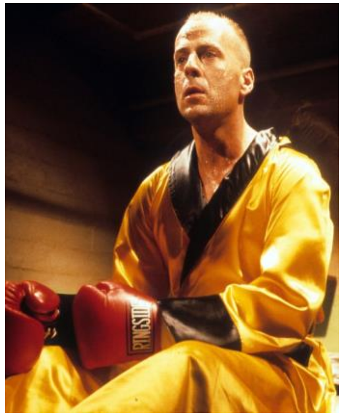
Ejemplo 1

Contexto

Mia Wallace

Jody

Jules Winnfield



Butch Coolidge

Yolanda/"Honey Bunny"

Ringo/"Pumpkin"

Marsellus Wallace

Vincent Vega

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

Archivo: KB1.pl

```
% ---------------------------
% Hechos (Facts)
% ---------------------------

woman(mia).
woman(jody).
woman(yolanda).

loves(vincent, mia).
loves(marsellus, mia).
loves(pumpkin, honey_bunny).
loves(honey_bunny, pumpkin).
```

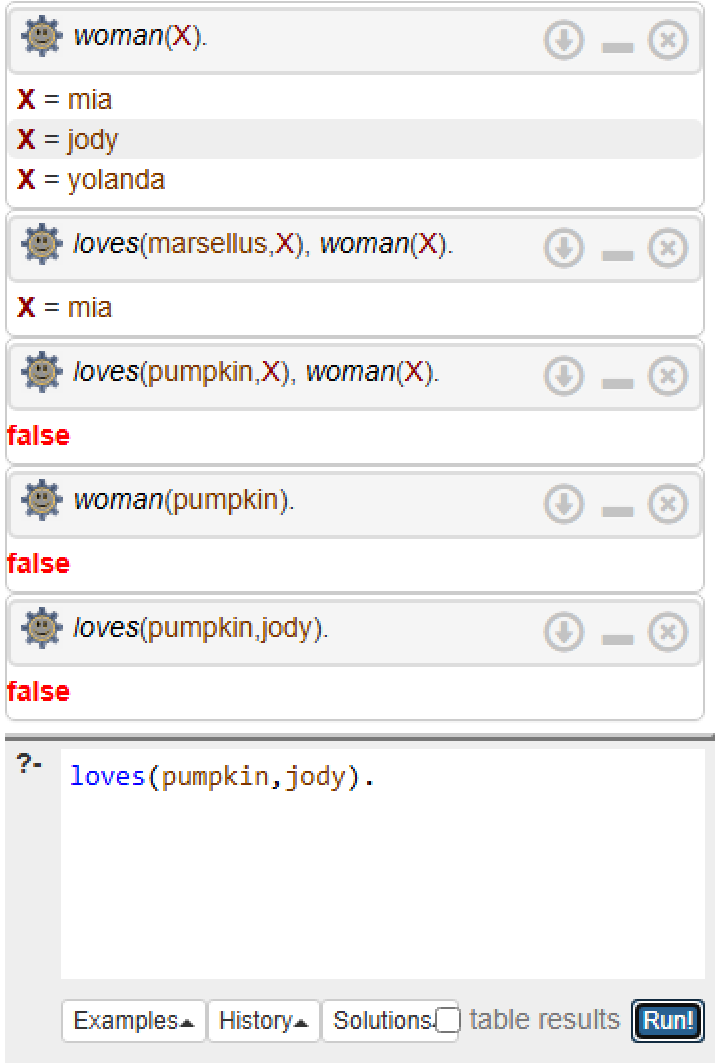
Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

Consultas

#	Consulta	Expresión prolog
1	¿Quienes son mujeres?	`woman(X).`
2	¿Cual es la mujer a la que ama marsellus?	`loves(marsellus,X), woman(X).`
3	¿Cual es la mujer a la que ama pumpkin?	`loves(pumpkin,X), woman(X).`
4	¿Pumpkin es mujer?	`woman(pumpkin).`
5	¿Pumpkin ama a jody?	`loves(pumpkin,jody).`



Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

Archivo: KB2.pl

```
% ---------------------------
% Hechos (Facts)
% ---------------------------

woman(mia).
woman(jody).
woman(yolanda).

loves(vincent, mia).
loves(marsellus, mia).
loves(pumpkin, honey_bunny).
loves(honey_bunny, pumpkin).

% ---------------------------
% Reglas (Rules)
% ---------------------------
% X está celoso de Y si tanto X como Y aman a la misma persona Z
jealous(X, Y) :- loves(X, Z), loves(Y, Z).
```

Un poco de Prolog

Ejemplo 1

Consultas

```
?- listing(loves).
```

```
1 ?- listing(loves).
loves(vincent, mia).
loves(marsellus, mia).
loves(pumpkin, honey_bunny).
loves(honey_bunny, pumpkin).

true.
```

```
?- listing(woman).
```

```
2 ?- listing(woman).
woman(mia).
woman(jody).
woman(yolanda).
```

```
?- loves(vincent, X).
?- loves(marsellus, X).
?- listing(jealous).
?- jealous(marsellus, vincent).
?- jealous(marsellus, pumpkin).
```

```
5 ?- loves(vincent,X).
X = mia.

6 ?- loves(marsellus,X).
X = mia.

7 ?- listing(jealous).
jealous(X, Y) :-
    loves(X, Z),
    loves(Y, Z).

true.

8 ?- jealous(marsellus, vincent).
true.

9 ?- jealous(marsellus, pumpkin).
false.
```

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2

Teniendo en cuenta la siguiente historia realizada en lenguaje natural, obtenga a partir de esta descripción del dominio del conocimiento (**mundo** que Prolog conoce y dentro del cual responde consultas) y escriba el correspondiente programa en prolog.

Los Simpson son una familia bastante peculiar, compuesta por Homero y Marge, y sus tres hijos: Bart, Lisa y Maggie. Homero trabaja como inspector en la planta nuclear de Springfield, mientras que Marge es una dedicada ama de casa. De los hijos, Bart es el mayor, seguido por Lisa, y finalmente Maggie, que aún es un bebé. Cada uno tiene una personalidad muy marcada: Bart es travieso, Lisa es una genio, y Maggie, la más tierna de todos, todavía no sabe hablar. Para finalizar, la familia no solo son personas, también hay animales, un perro cuyo nombre es Ayudante de Santa y una gata llamada Bola de nieve.

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2

Solución:

A continuación, resaltamos información clave que nos da el párrafo anterior:

- Los Simpson son una familia compuesta por Homero y Marge, y sus tres hijos: Bart, Lisa y Maggie.
- Homero es inspector en la planta nuclear de Springfield.
- Marge es ama de casa.
- Los hijos, de mayor a menor son: Bart, Lisa y Maggie.
- Bart es travieso.
- Lisa es una genio.
- Maggie es una bebe que aun no sabe hablar.
- Tienen un perro cuyo nombre es Ayudante de Santa.
- Tienen una gata llamada Bola de nieve.

Un poco de Prolog

Ejemplo 2

Universo:

- **Personas**: homero, marge, bart, lisa, maggie
- **Animales**: ayudante_de_santa, bola_de_nieve
- **Lugares**: Springfield, planta_nuclear
- **Entidades**: familia_simpson
- **Ocupaciones**: inspector, ama_de_casa

```
U = {homero, marge, bart, lisa, maggie,
     ayudante_de_santa, bola_de_nieve,
     springfield, planta_nuclear,
     familia_simpson,
     inspector, ama_de_casa}
```

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2

Predicados:

La siguiente tabla muestra algunos predicados asociados al ejemplo:

Predicado	**Aridad**	**Interpretación formal**
`miembro(x, y)`	2	x es miembro de la familia y
`padre(x, y)`	2	*x* es padre de *y*
`madre(x, y)`	2	*x* es madre de *y*
`trabaja_en(x, y)`	2	*x* trabaja en *y*
`ocupacion(x, y)`	2	*x* tiene como ocupación *y*
`mayor_que(x, y)`	2	*x* es mayor que *y* (en edad)
`es_bebe(x)`	1	*x* es un bebé
`es_travieso(x)`	1	*x* es travieso
`es_genio(x)`	1	*x* es un genio (muy inteligente)
`es_tierna(x)`	1	*x* es tierna
`no_habla(x)`	1	*x* no puede hablar
`perro(x)`	1	*x* es un perro
`gato(x)`	1	*x* es un gato
`mascota(x)`	1	*x* es una mascota
`mascota_de(x, y)`	2	x es mascota de y

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2

Archivo: KB_simpsons.pl

```
% ---------------------------
% Hechos (Facts)
% ---------------------------

% Miembros de la familia Simpson
miembro(homero, familia_simpson).
miembro(marge, familia_simpson).
miembro(bart, familia_simpson).
miembro(lisa, familia_simpson).
miembro(maggie, familia_simpson).

% Estructura familiar
padre(homero, bart).
padre(homero, lisa).
padre(homero, maggie).

madre(marge, bart).
madre(marge, lisa).
madre(marge, maggie).
```

```
% Profesiones
ocupacion(homero, inspector).
ocupacion(marge, ama_de_casa).

% Edades relativas
mayor_que(bart, lisa).
mayor_que(lisa, maggie).

% Características individuales
es_travieso(bart).
es_genio(lisa).
es_bebe(maggie).
no_habla(maggie).
es_tierna(maggie).

% Mascotas
perro(ayudante_de_santa).
gato(bola_de_nieve).
```

```
mascota(ayudante_de_santa).
mascota(bola_de_nieve).

mascota_de(ayudante_de_santa,
familia_simpson).
mascota_de(bola_de_nieve,
familia_simpson).
```

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

Archivo: KB_simpsons.pl

```
% ---------------------------
% Reglas (Rules)
% ---------------------------

% Un individuo es hijo si tiene un padre o madre
hijo(X, Y) :- padre(Y, X).
hijo(X, Y) :- madre(Y, X).

% Un individuo es progenitor si es padre o madre
progenitor(X, Y) :- padre(X, Y).
progenitor(X, Y) :- madre(X, Y).

% Dos individuos son hermanos si comparten padre y madre y no son la misma persona
hermano(X, Y) :-
    padre(P, X), padre(P, Y),
    madre(M, X), madre(M, Y),
    X \= Y.

% Un miembro es parte de la familia Simpson si aparece como miembro de ella
es_miembro_familia_simpson(X) :- miembro(X, familia_simpson).
```

Un poco de Prolog

Ejemplo 1

Archivo: KB_simpsons.pl

```
% Un individuo es hijo menor si todos los otros hijos son mayores
hijo_menor(X) :-
    hijo(X, P),
    \+ (hijo(Y, P), Y \= X, mayor_que(X, Y)).

% Un individuo es mascota si es un perro o un gato
es_mascota(X) :- perro(X).
es_mascota(X) :- gato(X).

% Una mascota pertenece a la familia Simpson si está registrada como mascota de ella
mascota_familia_simpson(X) :-
    mascota_de(X, familia_simpson).

% Un individuo es persona si es miembro de la familia Simpson y no es mascota
persona(X) :-
    miembro(X, familia_simpson),
    \+ mascota(X).
```

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

Consultas: A continuación se muestran algunas consultas y sus resultados

#	Consulta	Expresión prolog	Resultado
1	¿Bart es hijo de Homero?	`?- padre(homero, bart).`	`true.`
2	¿Bart es brillante?	`?- es_genio(bart).`	`false.`
3	¿Quién es el padre de Bart?	`?- padre(X, bart).`	`X = homero.`
4	¿Quién es brillante?	`?- es_genio(X).`	`X = lisa.`

5	¿Quiénes son los hijos de Homero?	`?- padre(homero, Hijo).`	`Hijo = bart ;`
			`Hijo = lisa ;`
			`Hijo = maggie`

6	¿Cuales son los hermanos?	`?- hermano(bart, X).`	`X = lisa ;` `X = maggie`
7	¿Cuáles son los miembros de la familia Simpson?	`?- miembro(X, familia_simpson).`	`X = ayudante_de_santa ;` `X = bola_de_nieve.`

8	¿Qué miembro de la familia no es travieso?	`?- miembro(X, familia_simpson), \+ es_travieso(X).`	`X = homero ;`
			`X = marge ;`
			`X = lisa ;`
			`X = maggie.`

Un poco de Prolog

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

Resultados en la consola de prolog de algunas de las consultas:

```
SWI-Prolog (AMD64, Multi-threaded, version 9.2.9)
File  Edit  Settings  Run  Debug  Help
Welcome to SWI-Prolog (threaded, 64 bits, version 9.2.9)
SWI-Prolog comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY. This is free software.
Please run ?- license. for legal details.

For online help and background, visit https://www.swi-prolog.org
For built-in help, use ?- help(Topic). or ?- apropos(Word).

?-
% c:/Users/Usuario/Documents/UdeA/2025-1/discretas_1/repos/apuntes_clases/codigos/ejemplo
s1/simpsons.pl compiled 0.00 sec, 37 clauses
?- padre(homero, bart).
true.

?- padre(X, bart).
X = homero.

?- es_genio(X).
X = lisa.

?- padre(homero, Hijo).
Hijo = bart ;
Hijo = lisa ;
Hijo = maggie.

?- hermano(bart, X).
X = lisa ;
X = maggie.

?- mascota_de(X, familia_simpson).
X = ayudante_de_santa ;
X = bola_de_nieve.

?-
```

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Curso de Matemáticas Discretas 1

Clase 5 – Lógica cuantificacional