Curso
Matemáticas Discretas I

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Clase 6 – Lógica cuantificacional

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden
- Repaso sobre los cuantificadores
- Equivalencias en lógica de predicados
- Ejemplos 1
- Cuantificadores anidados
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Ejemplos 2

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- **Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden**
- Repaso sobre los cuantificadores
- Equivalencias en lógica de predicados
- Ejemplos 1
- Cuantificadores anidados
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Ejemplos 2

Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Lógica de primer orden (FOL – First Order Logic)

- La **lógica de primer orden** (lógica de predicados o lógica cuantificacional) es un sistema lógico para razonar sobre las propiedades de los objetos.
- Amplía los conectores lógicos de la lógica proposicional con:
  - **Predicados** que describen las propiedades de los objetos.
  - **Funciones** que relacionan los objetos entre sí.
  - **Cuantificadores** que permiten razonar sobre muchos objetos a la vez.

Ejemplo: Exprese la afirmación "cualquier equipo que pase a la final puede ser campeón" en lógica proposicional y lógica cuantificacional.

Cualquier equipo que pase a la final puede ser campeón

Lógica proposicional

$$\text{Si } \underbrace{\text{un equipo pasa a la final}}_{F}, \underbrace{\text{entonces}}_{\rightarrow} \underbrace{\text{puede ser campeón}}_{C}$$

$$\boxed{F \rightarrow C}$$

Lógica cuantificacional

$$\underbrace{\text{Para todo } x}_{\forall x}, \text{ si } \underbrace{x \text{ pasa a la final}}_{F(x)}, \underbrace{\text{entonces}}_{\rightarrow} \underbrace{x \text{ puede ser campeón}}_{C(x)}$$

$$\boxed{\forall x\, F(x) \rightarrow C(x)}$$

Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conceptos claves de la lógica de primer orden

En lógica de predicados es importante tener claros los siguientes conceptos:

- Universo o dominio
- Objetos o individuos
- Predicados
- Variables
- Conjunto de verdad
- Cuantificadores.
- Funciones proposicionales

Canción del Juglar Alan-a-Dale [link]

Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Pasos para la traducción de lenguaje natural a lenguaje formal

A continuación se listan algunos pasos para traducir enunciados del lenguaje natural a lógica de primer orden:

1. Leer y comprender el enunciado completo.
2. Identificar el dominio del discurso.
3. Determinar las constantes y variables
4. Identificar los predicados.
5. Traducir conectores lógicos
6. Detectar cuantificadores:
7. Armar la fórmula
8. Verificar la fidelidad de la traducción

Canción del Juglar Alan-a-Dale [link]

Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tips de traducción al usar cuantificadores

La siguiente tabla resume algunas claves de traducción para frases en las que aparecen cuantificadores:

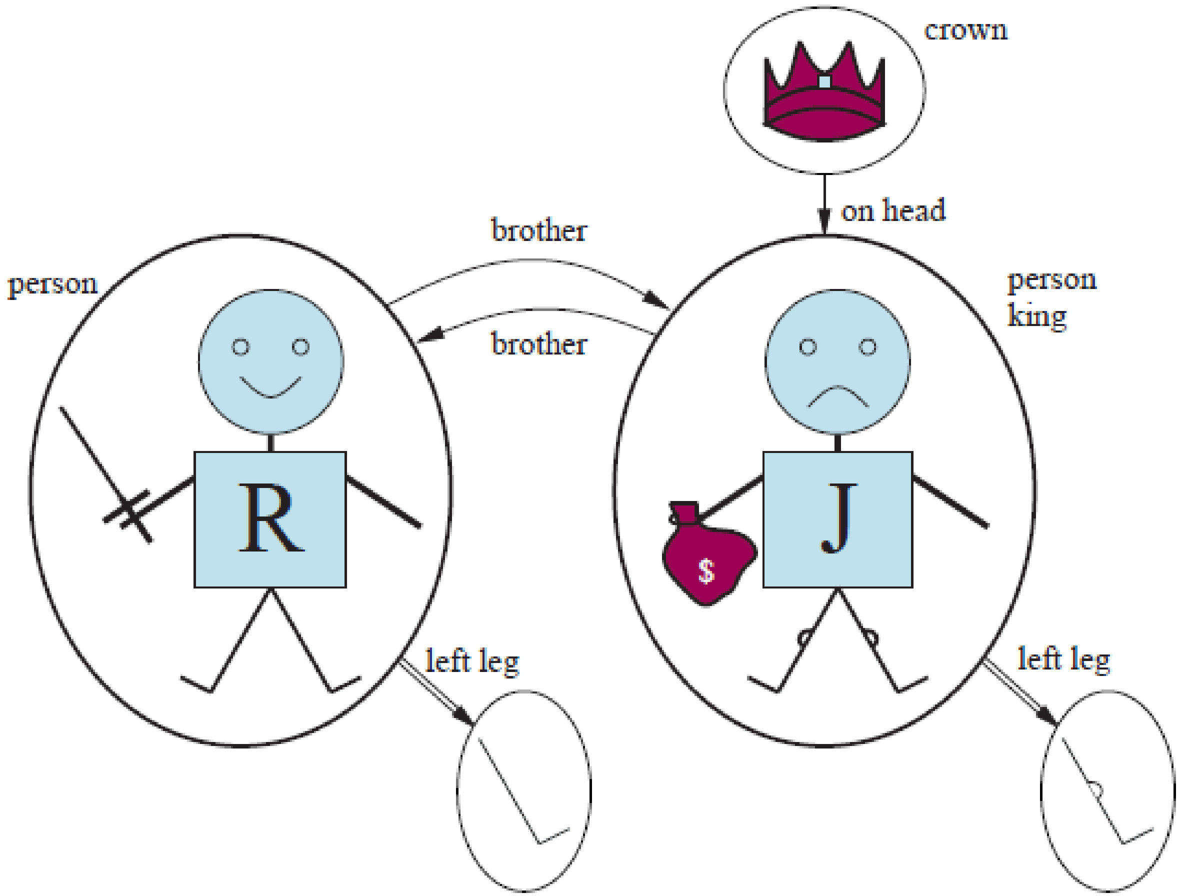
Afirmación	Traducción	Lectura	Intuición de utilidad	Ejemplo
Algún P es un Q	$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	Existe al menos un x tal que P(x) y Q(x) son verdaderas.	• Las afirmaciones que usan cuantificador existencial son falsas a menos que haya un ejemplo positivo • Si x es un ejemplo, debe tener la propiedad P además de la propiedad Q.	**Ejemplo**: Algunos estudiantes tienen beca. **Expresión**: $\exists x(estudiante(x) \wedge beca(x))$
Todos los P's son Q's	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	Para todo x, si P(x) es verdadera, entonces Q(x) también lo es.	• Las afirmaciones cuantificadas universalmente son verdaderas a menos que exista un contraejemplo. • Si x es un contraejemplo, debe tener la propiedad P pero no la propiedad Q.	**Ejemplo**: Todos los perros son mamíferos. **Expresión**: $\forall x(perro(x) \rightarrow mamifero(x))$

Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden

Lógica cuantificacional - Ejemplo

Contexto: La siguiente figura muestra a:

- Ricardo Corazón de León, Rey de Inglaterra de 1189 a 1199.
- Su hermano más joven, el malvado Rey Juan, quien reinó de 1199 a 1215.
- Las piernas izquierda de Ricardo y Juan.
- Una corona.



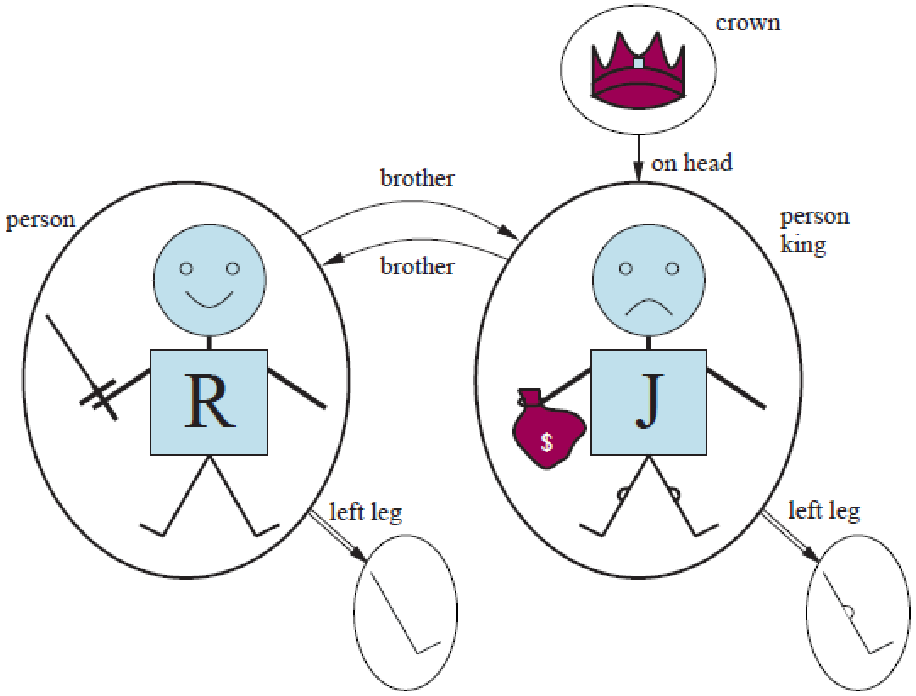
Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Lógica cuantificacional - Ejemplo

Contexto:

Dominio	U_1: Personas U_2: Cosas
Variables	x, y
Constantes	Personas: Ricardo, Juan Cosas: Corona, pierna
Predicados	• $Brother(x, y)$: x es hermano de y • $OnHead(x, y)$: x tiene y sobre su cabeza • $Person(x)$: x es una persona • $King(x)$: x es un rey • $Broken(x)$: x esta fracturada • $LeftLeg(x)$: pierna izquierda de x • $Owns(x, y)$: x posee a y • $Wears(x, y)$: x lleva puesta y • $Trains(x, y)$: x traicionó a y • $Evil(x)$: x es malvado • $Greedy(x)$: x es codicioso • $IsCrown(x)$: x es una corona
Cuantificadores	$\forall, \exists$



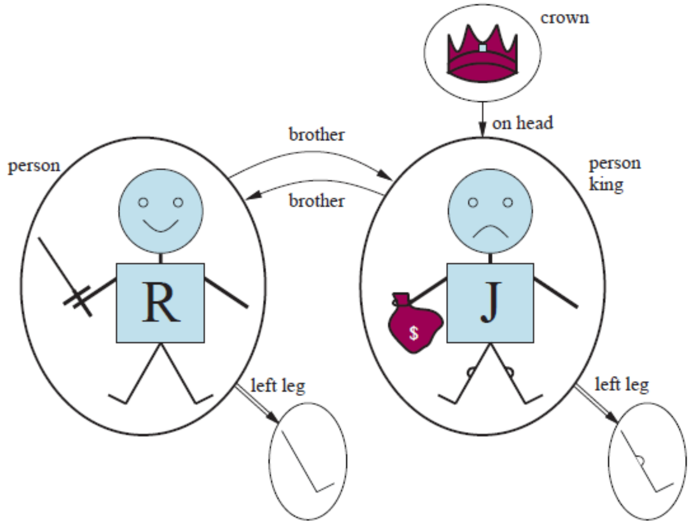
Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Lógica cuantificacional - Ejemplo

Contexto: Suponga que el juglar dice ciertas cosas sobre los reyes. La siguiente tabla muestra lo que dice el juglar (lenguaje natural) escrito en lógica de predicados.

#	Enunciado	Representación
1	Ricardo es un rey	$King(\text{Ricardo})$
2	Juan es una persona	$Person(\text{Juan})$
3	Juan es hermano de Ricardo	$Brother(\text{Juan}, \text{Ricardo})$
4	Juan traicionó a Ricardo	$Trains(\text{Juan}, \text{Ricardo})$
5	Ricardo lleva puesta la corona	$Wears(\text{Ricardo}, \text{Corona})$
6	Juan es Malvado y codicioso	$Evil(\text{Juan}) \land Greedy(\text{Juan})$
7	La pierna izquierda de Ricardo está rota	$Broken(LeftLeg(\text{Ricardo}))$
8	La pierna izquierda de Ricardo no es hermana de Juan	$\neg Brother(LeftLeg(\text{Ricardo}), \text{Juan})$
9	Todo rey es una persona	$\forall x\ King(x) \rightarrow Person(x)$
10	El hermano de un rey es un rey	$\forall x \forall y (Brother(x, y) \land King(y) \rightarrow King(x))$
11	Si alguien lleva puesta la corona, entonces es rey	$\exists x\ (Wears(x, \text{Corona}) \rightarrow King(x))$
12	Todo el que tiene la corona sobre su cabeza es rey	$\forall x (OnHead(x, \text{Corona}) \rightarrow King(x))$ $\forall x \forall y (IsCrown(y) \land OnHead(x, y) \rightarrow King(x))$



Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tabla Resumen – Lógica de primer orden

$$
\begin{array}{rcl}
Sentence & \rightarrow & AtomicSentence \mid ComplexSentence \\
AtomicSentence & \rightarrow & Predicate \mid Predicate(Term,\ldots) \mid Term = Term \\
ComplexSentence & \rightarrow & (\ Sentence\ ) \\
& \mid & \neg\ Sentence \\
& \mid & Sentence \land Sentence \\
& \mid & Sentence \lor Sentence \\
& \mid & Sentence\ \Rightarrow\ Sentence \\
& \mid & Sentence\ \Leftrightarrow\ Sentence \\
& \mid & Quantifier\ Variable,\ldots\ Sentence \\
\\
Term & \rightarrow & Function(Term,\ldots) \\
& \mid & Constant \\
& \mid & Variable
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcl}
Quantifier & \rightarrow & \forall \mid \exists \\
Constant & \rightarrow & A \mid X_1 \mid John \mid \cdots \\
Variable & \rightarrow & a \mid x \mid s \mid \cdots \\
Predicate & \rightarrow & True \mid False \mid After \mid Loves \mid Raining \mid \cdots \\
Function & \rightarrow & Mother \mid LeftLeg \mid \cdots \\
\text{OPERATOR PRECEDENCE} & : & \neg, =, \land, \lor, \Rightarrow, \Leftrightarrow
\end{array}
$$

Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tabla de verificación de tipos

Muy útil en problemas de lógica de primer orden. Esta tabla tabla describe tres tipos de componentes lógicos: conectivos, predicados y funciones, y explica:

- Sobre que operan (Tipo de entrada)
- Que producen (Tipo de salida)

Elemento	Opera sobre...	Produce...	Ejemplo
Conectivos (↔, ∧, ∨, ¬,...)	Proposiciones	Una proposición	$P \wedge Q$, $\neg P$, $P \rightarrow Q$
Predicados (=, <,)	Objetos	Una proposición	$mayor\_que(x, y)$, $x = y$, $par(x)$
Funciones	Objetos	Un objeto	$doble(x)$, $padre\_de(x)$, $suma(x, y)$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden
- **Repaso sobre los cuantificadores**
- Equivalencias en lógica de predicados
- Ejemplos 1
- Cuantificadores anidados
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Ejemplos 2

Repaso sobre cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Resumen cuantificadores

La siguiente tabla muestra un resumen entre los cuantificadores:

Característica	**Cuantificador universal** $(\forall)$	**Cuantificador existencial** $(\exists)$
Símbolo	$\forall$	$\exists$
Lectura común	"Para todo", "Para cada", "Para cualquier"	"Existe (al menos) un", "Para algún", "Hay algún"
Significado	La propiedad es verdadera para **todos** los elementos del dominio	La propiedad es verdadera para **al menos uno** del dominio
Estructura típica	$\forall x\ P(x)$	$\exists x\ P(x)$
Condición de verdad	$P(x)$ es verdadero para todo x.	Hay algún x para el cual $P(x)$ es verdadero.
Condición de falsedad	Hay algún x para el cual $P(x)$ es verdadero.	$P(x)$ es falso para cada x.
Palabras claves asociadas (al lenguaje natural)	Todos, cada, cualquiera, ninguno (usado con negación), siempre, para todo.	Existe, algún, algunos, hay, al menos uno, a veces, para algún.

El valor de verdad de $\forall x\ P(x)$ y $\exists x\ P(x)$ depende tanto de la función proposicional $P(x)$ como del dominio U.

Repaso sobre cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Precedencia de cuantificadores

- Es el orden en que se interpretan los cuantificadores (como ∀ y ∃) cuando aparecen anidados o en combinaciones.
- Aunque los cuantificadores no tienen una "precedencia rígida" como los operadores aritméticos, su **orden importa** muchísimo porque cambia completamente el significado de una expresión.
- Los cuantificadores ∀ y ∃ tienen mayor precedencia que todos los operadores lógicos.
    - **Ejemplo 1**: $\forall x P(x) \vee Q(x)$ es la disyunción de $\forall x P(x)$ y $Q(x)$, en otras palabra esta expresión es equivalente a $\left(\forall x P(x)\right) \vee Q(x)$ y no a $\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right)$.
    - **Ejemplo 2**: Aunque las expresiones $\forall x \exists y\ P(x, y)$ y $\exists y \forall x\ P(x, y)$ tienen los mismos símbolos, no significan lo mismo.

Expresión	**Significado**
$\forall x \exists y\ P(x, y)$	Para **cada x**, existe **un y distinto** (posiblemente) que cumple con $P(x, y)$
$\exists y \forall x\ P(x, y)$	Hay **un único y** que sirve para **todos los x**

Repaso sobre cuantificadores

Cuantificadores como conjunciones y disyunciones

- En lógica de primer orden (cuantificacional), los cuantificadores tienen una relación estrecha con las conjunciones (∧) y disyunciones (∨) cuando los interpretamos en **dominios finitos**.
- Teniendo en cuenta el siguiente dominio finito $U = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, Estas relaciones son las siguientes:
    1. Una proposición cuantificada universalmente (∀) es equivalente a una conjunción de proposiciones sin cuantificadores.

$$\forall\, P(x) = P(x_1) \land P(x_2) \land \cdots \land P(x_n)$$

    2. Una proposición cuantificada existencialmente (∃) es equivalente a una disyunción de proposiciones sin cuantificadores.

$$\exists\, P(x) = P(x_1) \lor P(x_2) \lor \cdots \lor P(x_n)$$

- Esta relación no se puede aplicar en dominios infinitos.

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden
- Repaso sobre los cuantificadores
- **Equivalencias en lógica de predicados**
- Ejemplos 1
- Cuantificadores anidados
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Ejemplos 2

Equivalencias en lógica de predicados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Sobre las equivalencias lógicas

- Las afirmaciones que involucran predicados y cuantificadores son lógicamente equivalentes si y solo si tienen el **mismo valor de verdad** en los siguientes casos:
    - Para cada predicado sustituido en estas afirmaciones.
    - Para cada dominio del discurso utilizado para las variables en las expresiones.
- La notación $S \equiv T$ indica que S y T son lógicamente equivalentes.
    - **Ejemplo**: $\forall x\ \neg\neg S(x) = \forall x\ S(x)$
- Las equivalencias son herramientas fundamentales para cosas como:
    - Transformar expresiones sin cambiar su significado lógico.
    - Simplificar pruebas.
    - Aplicar reglas de inferencia o deducción natural.

Equivalencias en lógica de predicados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Cuantificadores y negaciones

- Los cuantificadores existencial (∃) y universal (∀) están profundamente conectados a través de las negaciones.
- Cuando negamos una afirmación cuantificada, el cuantificador cambia:
    - Negar que “para **todo** $\boldsymbol{x}$ se cumple $P(x)$” es lo mismo que decir que "**existe al menos un** $\boldsymbol{x}$" tal que $\boldsymbol{P(x)}$ **no se cumple**. Formalmente esto es:

$$\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$$

    - Negar que "**existe** $\boldsymbol{x}$" tal que $P(x)$ se cumple, es lo mismo que decir que "**para todo** $\boldsymbol{x}$", $P(x)$ **no se cumple**. Lo cual formalmente es:

$$\neg\exists\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$$

- El cuantificador existencial puede expresarse en términos del universal, y viceversa, mediante las leyes de Morgan para cuantificadores.

Equivalencias en lógica de predicados

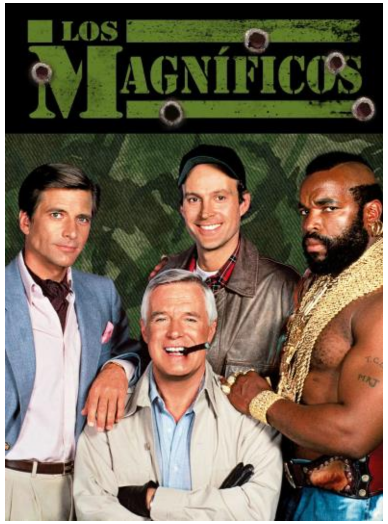
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Cuantificadores y negaciones – Leyes de Morgan para cuantificadores

- La siguiente tabla resume las leyes de Morgan para cuantificadores:

Equivalencia lógica	¿Cuando es la negación cierta?	¿Cuándo la negación es falsa?
$\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$	Para cada x, $P(x)$ es falsa	Hay un x para el cual $P(x)$ es verdadero
$\neg\forall\exists\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$	Hay un x para el cual $P(x)$ es falsa	$P(x)$ es verdadero para todo x

- Al aplicar las leyes de Morgan es posible decir lo mismo empleando diferentes cuantificadores.



Ejemplo: A todos les gusta volar se puede expresar como $\forall x\ P(x)$; sin embargo, mediante el uso de las leyes de Morgan podemos decir lo mismo empleando el cuantificador existe ($\exists$):

$$\forall x\ P(x) \equiv \neg\neg\big(\forall x\ P(x)\big) \equiv \neg\big(\neg\forall x\ P(x)\big) \equiv \neg\exists x\ \neg P(x)$$

Según lo anterior, decir que " todos les gusta volar" $\big(\forall x\ P(x)\big)$ es lo mismo que decir que "No hay alguien a quien no le guste volar" $\big(\neg\exists x\ \neg P(x)\big)$

Equivalencias en lógica de predicados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Cuantificadores y negaciones - Ejemplos

- La siguiente tabla muestran algunos ejemplos al aplicar las leyes de Morgan para los cuantificadores.

Proposición original		Proposición negada	
Enunciado original	**Forma Lógica**	**Negación lógica**	**Enunciado negado**
Todos los estudiantes aprobaron.	$\forall x\ Pass(x)$	$\neg\forall x\ Pass(x) \equiv \exists x\ \neg Pass(x)$	Algunos estudiantes no aprobaron.
Existe un estudiante que aprobó.	$\exists x\ Pass(x)$	$\neg\exists x\ Pass(x) \equiv \forall x\ \neg Pass(x)$	Ningún estudiante aprobó
A todo el mundo no le gustan las espinacas	$\forall x\ \neg Like(x, \text{Espinacas})$	$\neg\forall x\ \neg Like(x, \text{Espinacas}) \equiv$ $\exists x \neg(\neg Like(x, \text{Espinacas})) \equiv$ $\exists x \neg(\neg Like(x, \text{Espinacas})) \equiv$ $\exists x\ Like(x, \text{Espinacas}) \equiv$	A algunas personas les gustan las espinacas

- Realizar la negación se resume en los siguientes pasos:
  1. Cambiar el cuantificador ($\forall \rightarrow \exists$ ó $\exists \rightarrow \forall$)
  2. Negar la proposición interna ($P \rightarrow \neg P$)

Equivalencias en lógica de predicados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Formas Aristotélicas

Las cuatro formas aristotélicas son proposiciones categóricas básicas que forman la base del silogismo clásico en la lógica aristotélica:

Forma	Enunciado	Forma Aristotélica	Lógica de predicados	Ejemplo
Forma A: Universal afirmativa	Todos los S son P	$A(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \rightarrow P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x es un P.	**Ejemplo**: Todos los hombres son mortales. **Expresión**: $\forall x(hombre(x) \rightarrow mortal(x))$
Forma E: Universal negativa	Ningún S es P	$E(S,P)$	$\forall x\,(S(x) \rightarrow \neg P(x))$ **Interpretación:** Para todo x, si x es un S, entonces x no es un P.	**Ejemplo**: Ningún cuadrado es circulo. **Expresión**: $\forall x(cuadrado(x) \rightarrow \neg circulo(x))$
Forma I: Particular afirmativa	Algún S es P	$I(S,P)$	$\exists x(S(x) \wedge P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y también es P.	**Ejemplo**: Alguno estudiante es ingeniero. **Expresión**: $\exists x(estudiante(x) \wedge ingeniero(x))$
Forma O: Particular negativa	Algún S no es P	$O(S,P)$	$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$ **Interpretación:** Existe al menos un x tal que x es S y no es P.	**Ejemplo**: Algún pájaro no vuela. **Expresión**: $\exists x(pajaro(x) \wedge \neg vuela(x))$

Conceptos importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Tabla de verificación de tipos

Muy útil en problemas de lógica de primer orden. Esta tabla tabla describe tres tipos de componentes lógicos: conectivos, predicados y funciones, y explica:

- Sobre que operan (Tipo de entrada)
- Que producen (Tipo de salida)

Elemento	**Opera sobre...**	**Produce...**	**Ejemplo**
Conectivos (↔, ∧, ∨, ¬,...)	Proposiciones	Una proposición	$P \wedge Q, \neg P, P \rightarrow Q$
Predicados (=, <,)	Objetos	Una proposición	$mayor\_que(x, y), x = y, par(x)$
Funciones	Objetos	Un objeto	$doble(x), padre\_de(x), suma(x, y)$

Agenda

- Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden
- Repaso sobre los cuantificadores
- Equivalencias en lógica de predicados
- **Ejemplos 1**
- Cuantificadores anidados
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Ejemplos 2

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enunciados

1. ¿Cuáles son las negaciones de las afirmaciones “Hay un político honesto” y “Todos los colombianos comen frijoles con mazamorra”?
2. ¿Cuáles son las negaciones de las afirmaciones “Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java” y “Uno o más estudiantes de esta clase han hecho un curso de Java”?
3. Cuales son las negaciones de las proposiciones $\forall x\ (x^2 > x)$ y $\exists x\ (x^2 = 2)$
4. Utilice predicados y cuantificadores para expresar las especificaciones del sistema “Todo mensaje de correo mayor a un megabyte será comprimido” y “Si un usuario está activo, al menos un enlace de red estará disponible”.

Ejemplos 1

Enunciados

5. Sean:

$$U = \{\text{cachivaches}, \text{aparatos raros}, \text{cosas}\}$$

Además, sea:

- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$: "$x$ es un cachivache"
- $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$: "$x$ es un aparato raro"
- $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$: "$x$ es una cosa"

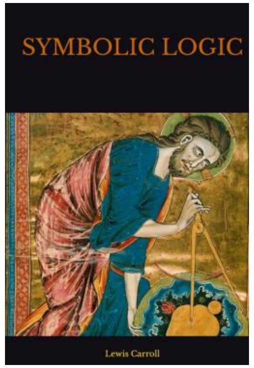
Escriba en lenguaje formar las siguientes expresiones:

- Nada es un aparato raro
- Todos los cachivaches son aparatos raros.
- Algunos cachivaches son cosas.
- Si algún cachivache es un aparato raro, entonces también es una cosa.
- Cualquier cachivache que sea aparato raro, es también una cosa

Ejemplos 1

Enunciados

6. Lewis Carroll (en realidad C. L. Dodgson, quien escribía con este seudónimo), autor de Alicia en el País de las Maravillas, también es autor de varias obras sobre lógica simbólica como Lógica simbólica (Symbolic Logic). Teniendo en cuenta el siguiente argumento (premisas y conclusión) obtenido de uno se sus libros, escriba su traducción en lenguaje formal:
    - “Todos los leones son feroces.”
    - “Algunos leones no toman café.”
    - “Algunas criaturas feroces no toman café.”



Ejemplos 1

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

¿Cuáles son las negaciones de las afirmaciones “Hay un político honesto” y “Todos los colombianos comen frijoles con mazamorra”?

Solución

Afirmación 1: Hay un político honesto

Hay un político honesto $\xrightarrow{\text{Expresión lógica}}$ $\exists x H(x)$

Negación: $\neg \exists x H(x) \equiv \forall x \neg H(x)$

Todo político es deshonesto $\xrightarrow{\text{Expresión lógica}}$ $\forall x \neg H(x)$

Dominio	U: Todos politicos
Variables	x
Constantes	---
Predicados	• $H(x)$: "x es honesto"

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

¿Cuáles son las negaciones de las afirmaciones “Hay un político honesto” y “Todos los colombianos comen frijoles con mazamorra”?

Solución

Afirmación 2: Todos los colombianos comen frijoles con mazamorra

Todos los colombianos comen frijoles con mazamorra $\xrightarrow{\text{Expresión lógica}}$ $\forall x C(x)$

Negación

$\neg\forall x C(x) \equiv \exists x \neg C(x)$

Algunos colombianos no comen frijoles con mazamorra

Hay algún colombiano que no comen frijoles con mazamorra $\xrightarrow{\text{Expresión lógica}}$ $\forall\exists\neg C(x)$

Dominio	U: Todos colombianos
Variables	x
Constantes	---
Predicados	• $C(x)$: "x come frijores con $mazamorra$"

Ejemplos 1

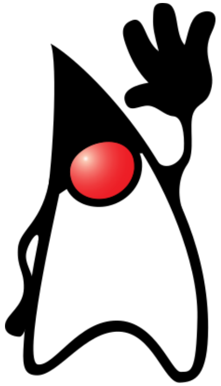
Ejemplo 2

¿Cuáles son las negaciones de las afirmaciones “Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java” y “Uno o más estudiantes de esta clase han hecho un curso de Java”?

Solución

Afirmación 1: “Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java”

Dominio	U: Todos los estudiantes de esta clase
Variables	x
Predicados	• $J(x)$: "x ha tomado clase de de Java"



$\forall x J(x)$ Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java

Negación

$\neg \forall x J(x) \equiv \exists x \neg J(x)$

$\exists x \neg J(x)$ Hay estudiantes de esta clase que no han tomado un curso de Java

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2

¿Cuáles son las negaciones de las afirmaciones “Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java” y “Uno o más estudiantes de esta clase han hecho un curso de Java”?

Solución

Afirmación 1: “Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java”

Dominio	U: Todas personas
Variables	x
Predicados	• $S(x)$: "x es estudiante de esta clase" • $J(x)$: "x ha tomado clade de Java"

$$\forall x\big(S(x) \rightarrow J(x)\big)$$

Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java

$$\neg\forall x\big(S(x) \rightarrow J(x)\big) \equiv \exists x\neg\big(S(x) \rightarrow J(x)\big) \equiv \exists x\neg\big(S(x) \rightarrow J(x)\big)$$

$$\equiv \exists x\neg\big(\neg S(x) \vee J(x)\big) \equiv \exists x\big(S(x) \wedge \neg J(x)\big)$$

Negación

$$\exists x\big(S(x) \wedge \neg J(x)\big)$$

Existe al menos un estudiantes de esta clase que **no** ha tomado un curso de Java

Ejemplos 1

Ejemplo 2

¿Cuáles son las negaciones de las afirmaciones “Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java” y “Uno o más estudiantes de esta clase han hecho un curso de Java”?

Solución

Afirmación 2: “Uno o más estudiantes de esta clase han hecho un curso de Java”

Dominio	U: Todos los estudiantes de esta clase
Variables	x
Predicados	• $J(x)$: "x ha tomado clase de de Java"

$\exists x J(x)$ Uno o mas estudiantes de esta clase han hecho un curso de Java

Negación

$\neg \exists x J(x) \equiv \forall x \neg J(x)$

$\forall x \neg J(x)$ Cada estudiante de esta clase no ha tomado un curso de Java

Ejemplos 1

Ejemplo 2

¿Cuáles son las negaciones de las afirmaciones “Todos los estudiantes de esta clase han tomado un curso de Java” y “Uno o más estudiantes de esta clase han hecho un curso de Java”?

Solución

Afirmación 2: “Uno o más estudiantes de esta clase han hecho un curso de Java”

Dominio	U: Todas personas
Variables	x
Predicados	• $S(x)$: "x es estudiante de esta clase" • $J(x)$: "x ha tomado clade de Java"

$$\exists x\big(S(x) \wedge J(x)\big)$$

Al menos un estudiante de esta clase han hecho un curso de Java

Negación

$$\neg\exists x\big(S(x) \wedge J(x)\big) \equiv \forall x \neg\big(S(x) \wedge J(x)\big) \equiv \forall x\big(\neg S(x) \vee \neg J(x)\big)$$

$$\forall x\big(\neg S(x) \vee \neg J(x)\big)$$

Ningún estudiantes de esta clase ha hecho un curso de Java

Todos los estudiantes de esta clase no han hecho un curso de Java

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 3

Cuales son las negaciones de las proposiciones $\forall x\ (x^2 > x)$ y $\exists x\ (x^2 = 2)$.

Solución

Proposición 1: Se da $\forall x\ (x^2 > x)$ y nos preguntan por $\neg\forall x\ (x^2 > x) = ?$

Lenguaje formal	Lenguaje natural
$\forall x\ (x^2 > x)$	• Para todo número x, x^2 es mayor que x. • El cuadrado de cualquier número es mayor que el mismo número. • Todo número elevado al cuadrado es mayor que él mismo. • Para cada x, su cuadrado excede su valor

Negación de la expresión original: $\neg\forall x\ (x^2 > x) \equiv \exists x \neg(x^2 > x) \equiv \exists x(x^2 \leq x)$

Lenguaje formal	Lenguaje natural
$\exists x(x^2 \leq x)$	• Existe al menos un número tal que su cuadrado es menor o igual que él mismo. • Hay algún número cuyo cuadrado no es mayor que el número. • No todos los números cumplen que su cuadrado es mayor que ellos. • Para al menos un valor de x, $x^2 \leq x$ • No es cierto que todos los números tengan un cuadrado mayor que sí mismos.

Ejemplos 1

Ejemplo 3

Cuales son las negaciones de las proposiciones $\forall x\ (x^2 > x)$ y $\exists x\ (x^2 = 2)$.

Solución

Proposición 2: Se da $\exists x\ (x^2 = 2)$ y nos preguntan por $\neg\exists x\ (x^2 = 2) = ?$

Lenguaje formal	Lenguaje natural
$\exists x\ (x^2 = 2)$	• Existe al menos un número cuyo cuadrado es igual a 2. • Hay un número tal que, al elevarlo al cuadrado, da 2 • Existe un valor de x que al cuadrarlo resulta en 2 • Algún número cumple que su cuadrado es 2.

Negación de la expresión original: $\neg\exists x\ (x^2 = 2) \equiv \forall x \neg(x^2 = 2) \equiv \forall x(x^2 \neq 2)$

Lenguaje formal	Lenguaje natural
$\forall x(x^2 \neq 2)$	• Para todo número, su cuadrado no es igual a 2.. • No existe ningún número cuyo cuadrado sea igual a 2. • Ningún número elevado al cuadrado da como resultado 2. • Es falso que algún número tenga por cuadrado el valor 2.

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 4

Utilice predicados y cuantificadores para expresar las especificaciones del sistema “Todo mensaje de correo mayor a un megabyte será comprimido” y “Si un usuario está activo, al menos un enlace de red estará disponible”.

Solución

En el problema se pueden identificad dos proposiciones:

- “Todo mensaje de correo mayor a un megabyte será comprimido”
- “Si un usuario está activo, al menos un enlace de red estará disponible”.

Ejemplos 1

Ejemplo 4

Solución

- **Proposición 1**: “Todo mensaje de correo mayor a un megabyte será comprimido”

$$\underbrace{\text{Todo}}_{\forall}\ \underbrace{\underbrace{\overbrace{\text{mensaje}}^{\text{Todos los mensajes de correo}}}_{m}\ \text{de correo electrónico mayor a un}\ \underbrace{\overbrace{\text{megabyte}}^{\text{Reales positivos}}}_{y}}_{\boldsymbol{S}(\boldsymbol{m},\boldsymbol{y})\text{: El mensaje de correo } m \text{ mayor de } y}\ \underbrace{\text{será comprimido}}_{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{m})\text{: El mensaje de correo } m \text{ sera comprimido}}$$

Expresión lógica

$$\forall m\ \big(S(m,1) \rightarrow C(m)\big)$$

Ejemplos 1

Ejemplo 4

Solución

- **Proposición 2**: “Si un usuario está activo, al menos un enlace de red estará disponible”.

Todos los usuarios

Todos los enlaces de red

Todos los estados de los enlaces de red

$\rightarrow$

Si un usuario esta activo, al menos un enlace de red estará disponible

$\exists$ u $\exists$ n x

$A(u)$: El usuario u esta activo

$S(n, x)$: El enlace de red n esta x

Expresión lógica

$$\exists u\ A(u) \rightarrow \exists n\ S(n, \text{disponible})$$

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 4

Utilice predicados y cuantificadores para expresar las especificaciones del sistema "Todo mensaje de correo mayor a un megabyte será comprimido" y "Si un usuario está activo, al menos un enlace de red estará disponible".

Solución

En la siguiente tabla se resumen los resultados de lo que se solicita:

Lenguaje Natural	Lenguaje formal
Todo mensaje de correo mayor a un megabyte será comprimido	$\forall m \left(S(m,1) \rightarrow C(m)\right)$
Si un usuario está activo, al menos un enlace de red estará disponible	$\exists u\ A(u) \rightarrow \exists n\ S(n, \text{disponible})$

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 5

Sean:

$$U = \{\text{cachivaches}, \text{aparatos raros}, \text{cosas}\}$$

Además, sea:

- $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$: "$x$ es un cachivache"
- $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x})$: "$x$ es un aparato raro"
- $\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$: "$x$ es una cosa"

Escriba en lenguaje formar las siguientes expresiones:

- Nada es un aparato raro
- Todos los cachivaches son aparatos raros.
- Algunos cachivaches son cosas.
- Si algún cachivache es un aparato raro, entonces también es una cosa.
- Cualquier cachivache que sea aparato raro, es también una cosa

Ejemplos 1

Ejemplo 5

Solución

Sean:

$$U = \{\text{cachivaches}, \text{aparatos raros}, \text{cosas}\}$$

Además, sea:

- $\boldsymbol{F(x)}$: "x es un cachivache"
- $\boldsymbol{S(x)}$: "x es un aparato raro"
- $\boldsymbol{T(x)}$: "x es una cosa"

Proposición 1: Nada es un aparato raro

$$\underbrace{\text{Ningun}}_{\neg\exists}\ \underbrace{x \text{ es un aparato raro}}_{P(x)}$$

$$\neg\exists x\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$$

Ejemplos 1

Ejemplo 5

Solución

Sean:

$$U = \{\text{cachivaches}, \text{aparatos raros}, \text{cosas}\}$$

Además, sea:

- $\boldsymbol{F(x)}$: "x es un cachivache"
- $\boldsymbol{S(x)}$: "x es un aparato raro"
- $\boldsymbol{T(x)}$: "x es una cosa"

Proposición 2: Todos los cachivaches son aparatos raros

$$\text{Si } \underbrace{\text{todo}}_{\forall}\ \underbrace{x \text{ es cachivache}}_{F(x)},\ \overset{\rightarrow}{\text{entonces}}\ \underbrace{x \text{ es un aparato raro}}_{S(x)} \qquad \forall x\, \big(F(x) \rightarrow S(x)\big)$$

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo 5

Solución

Sean:

$$U = \{\text{cachivaches, aparatos raros, cosas}\}$$

Además, sea:

- $\boldsymbol{F(x)}$: "x es un cachivache"
- $\boldsymbol{S(x)}$: "x es un aparato raro"
- $\boldsymbol{T(x)}$: "x es una cosa"

Proposición 3: Algunos cachivaches son cosas

$$\underbrace{\text{Existen}}_{\exists}\ \underbrace{x \text{ que son cachivaches}}_{F(x)}\ \overset{\wedge}{\text{y}}\ \underbrace{\text{cosas}}_{T(x)}$$

$$\exists x\, \big(F(x) \wedge T(x)\big)$$

Ejemplos 1

Ejemplo 5

Solución

Sean:

$$U = \{\text{cachivaches}, \text{aparatos raros}, \text{cosas}\}$$

Además, sea:

- $\boldsymbol{F(x)}$: "x es un cachivache"
- $\boldsymbol{S(x)}$: "x es un aparato raro"
- $\boldsymbol{T(x)}$: "x es una cosa"

Proposición 4: Si algún cachivache es un aparato raro, entonces también es una cosa.

$$\text{Si } \underbrace{\text{existen algún}}_{\exists}\ \underbrace{x \text{ que sea cachivache}}_{F(x)}\ \overset{\wedge}{\text{y}}\ \underbrace{\text{aparato raro}}_{S(x)},\ \overset{\rightarrow}{\text{entonces}}\ \underbrace{\text{es una cosa}}_{T(x)}$$

$$\exists x\ \Big(\big(F(x) \wedge S(x)\big) \rightarrow T(x)\Big)$$

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 5

Solución

Sean:

$$U = \{\text{cachivaches}, \text{aparatos raros}, \text{cosas}\}$$

Además, sea:

- $\boldsymbol{F(x)}$: "x es un cachivache"
- $\boldsymbol{S(x)}$: "x es un aparato raro"
- $\boldsymbol{T(x)}$: "x es una cosa"

Proposición 5: Cualquier cachivache que sea aparato raro, es también una cosa

Si $\underbrace{\text{todo}}_{\forall}$ $\underbrace{x \text{ es un cachivache}}_{F(x)}$ $\overset{\wedge}{\text{y}}$ $\underbrace{\text{aparato raro}}_{S(x)}$$\overset{\rightarrow}{,}$ $\underbrace{\text{es también una cosa}}_{T(x)}$

$$\forall x\ \big((F(x) \wedge S(x)) \rightarrow T(x)\big)$$

Ejemplos 1

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 6

Lewis Carroll (en realidad C. L. Dodgson, quien escribía con este seudónimo), autor de Alicia en el País de las Maravillas, también es autor de varias obras sobre lógica simbólica como Lógica simbólica (Symbolic Logic). Teniendo en cuenta el siguiente argumento (premisas y conclusión) obtenido de uno se sus libros, escriba su traducción en lenguaje formal:

- “Todos los leones son feroces.”
- “Algunos leones no toman café.”
- “Algunas criaturas feroces no toman café.”

Solución

En la siguiente tabla se resumen los predicados y el dominio para cada variable:

Predicados	**Dominio**
$P(x)$: x es un leon	Todas las criaturas
$Q(x)$: x es feroz	
$R(x)$: x toma café	

Ejemplos 1

Ejemplo 6

Solución

Ahora, en la siguiente tabla se muestra la traducción de cada uno de los enunciados a lógica de predicados:

Enunciado	Expresión simbólica
Todos los leones son feroces	$\forall x\,\big(P(x) \to Q(x)\big)$
Algunos leones no toman café	$\exists x\,\big(P(x) \wedge \neg R(x)\big)$
Algunas criaturas feroces no toman café	$\exists x\,\big(Q(x) \wedge \neg R(x)\big)$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden
- Repaso sobre los cuantificadores
- Equivalencias en lógica de predicados
- Ejemplos 1
- **Cuantificadores anidados**
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- Ejemplos 2

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Importancia del contexto

Situación: Suponga que usted está visitando una fábrica que produce microchips y el guía de la fabrica le dice:

Hay una persona que supervisa todos los detalles del proceso de producción.

Interpretación: ¿Cuál de las siguientes opciones describe mejor su significado?

Interpretación 1: Hay una sola persona que supervisa todos los detalles del proceso de producción

Interpretación 2: Para cualquier detalle de la producción en particular, hay una persona que supervisa ese detalle, pero podría haber diferentes supervisores de diferentes detalles.

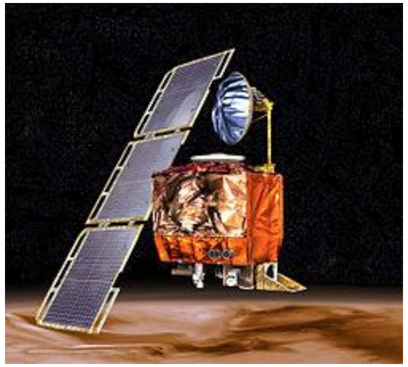
Ambigüedad: falta de claridad en el significado de una expresión debido a que puede tener múltiples interpretaciones válidas. Para aclarar una ambigüedad es necesario dar mas contexto.

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Importancia del contexto

- En la vida cotidiana, son comunes las situaciones cargadas de ambigüedad y, aunque el contexto ayuda, a veces simplemente entendemos mal.
- Por el contrario, en matemáticas, lógica formal y ciencia computacional, **es esencial** que interpretemos los enunciados exactamente de la misma manera de tal manera que no haya ambigüedad.
- La **ambigüedad** en requerimientos, especificaciones o comunicación ha sido una causa crítica de fallos graves en ingeniería de software. Algunos famosos son:
    - **Mars Climate Orbiter (1999)**: Destrucción de la nave al ingresar mal a la atmosfera de marte debido a ambigüedad en los requerimientos del sistema y falta de aclaración sobre las unidades usadas del sistema de navegación, pues usó dos sistemas de unidades diferentes: sistema ingles vs. sistema métrico (link).
    - **Ariane 5, vuelo 501 (1996)**: El cohete explotó 37 segundos después del lanzamiento debido a componente de software reutilizado de Ariane 4 causó un desbordamiento al convertir un valor de 64 bits a 16 bits (link).
    - **Sistema de gestión del inventario de Hershey's (1999)**: Falló la implementación del sistema ERP (SAP) y de gestión de pedidos (Siebel) debido a Malos requerimientos, mal entendimiento del flujo del negocio y ambigüedad entre los módulos del sistema (link).



Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ambigüedades en lógica

En lógica, la ambigüedad puede surgir de varias maneras, especialmente cuando una expresión puede interpretarse de múltiples formas. A continuación se describen algunos de los tipos de ambigüedad que se pueden dar:

- **Ambigüedad sintáctica**: Ocurre cuando no hay claridad en la forma cómo se agrupan los operadores o términos.
  - **Ejemplo**: ¿Qué se quiere decir con $p \vee q \wedge r$, $(p \vee q) \wedge r$ ó $p \vee (q \wedge r)$?

- **Ambigüedad de alcance (de cuantificadores)**: Se da cuando no se sabe con certeza qué parte de la fórmula está bajo el control de cada cuantificador.
  - **Ejemplo**: Las siguientes dos expresiones no dicen lo mismo: $\forall x \exists y\ ama(x, y) \neq \exists y \forall x\ ama(x, y)$

- **Ambigüedad semántica**: Aparece cuando una expresión puede tener varios significados posibles, incluso con la misma estructura.
  - **Ejemplo**: Todos los estudiantes leyeron un libro, se refiere a ¿el mismo o diferentes libros?

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Alcance

- El alcance (scope) es la porción de una fórmula lógica sobre la cual un cuantificador o variable tiene efecto:

Lenguaje natural

- Todos los estudiantes leen al menos un libro
- Para cada estudiante, existe al menos un libro tal que lo lee.

Lenguaje Formal

$$\forall x \underbrace{\left(estudiante(x) \to \exists y \underbrace{\left(libro(y) \land lee(x,y)\right)}_{\text{Alcance } \exists y}\right)}_{\text{Alcance } \forall x}$$

Análisis
• $\forall x$: para todo x
• $estudiante(x)$: x es un estudiante
• $\exists y$: existe al menos un y
• $libro(y)$: y es un libro
• $lee(x,y)$: el estudiante x lee el libro y

Cuantificadores anidados

Alcance

- El alcance es importante porque determina el contexto. A continuación se muestra como:
  - **Evita ambigüedad**: ya que define con precisión qué variables están siendo cuantificadas y dónde. Cambiarlo cambia el significado lógico.
  - **Asegura validez en inferencias**: En pruebas o deducciones, usar variables fuera de su alcance es un error lógico.
  - **Es clave para estructuras anidadas**: La lógica de primer orden permite cuantificadores anidados. El alcance te dice cómo se relacionan entre sí.
- Cambiar el alcance cambia el significado:

Lenguaje natural
Todos aman a alguien

Lenguaje formal
$\forall x \exists y \; ama(x, y)$

Lenguaje natural
Alguien ama a todos

Lenguaje formal
$\exists x \forall y \; ama(x, y)$

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El orden importa

En los cuantificadores anidados el orden es muy importante porque determina la lógica de la afirmación. Cambiar el orden puede cambiar completamente el significado de una expresión.

Ejemplo 1:

Usando los predicados

- $Persona(p)$: p es una persona
- $Ama(x, y)$: que indica que x ama a y,

Escriba una oración en lógica de primer orden que signifique:

"Cada persona ama a alguien".

Ejemplo tomado de: link

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El orden importa

Ejemplo:

$\underbrace{\text{“Cada persona ama a alguien mas”}}$.

Lenguaje natural

- Cada persona ama a alguien mas
- Cada persona ama a otra persona
- Cada persona ***p*** ama a alguna otra persona

Cada persona ***p*** $\underbrace{\text{ama a alguna otra persona}}$

Lenguaje natural

- ***p*** ama a alguien mas
- Existe una persona a la que ***p*** ama
- Hay una persona distinta a ***p*** que ***p*** ama.
- Hay una persona ***q***, distinta de ***p***, tal que ***p*** ama a ***q***

Para cada persona ***p***, existe una persona ***q***, distinta de ***p***, tal que ***p*** ama a ***q***

Interpretación: Todos los S son P
$\forall x\,\big(S(x) \rightarrow P(x)\big)$

$$\forall p\ (persona(p) \rightarrow p \text{ ama a otra persona})$$

Interpretación: Algún S es P
$\exists x\,\big(S(x) \wedge P(x)\big)$

$$\forall p\ \big(persona(p) \rightarrow \exists q(persona(q) \wedge p \neq q \wedge Ama(p,q))\big)$$

Ejemplo tomado de: [link]

Cuantificadores anidados

El orden importa

Ejemplo:

Interpretación: Todos los S son P
$\forall x\,\big(S(x) \rightarrow P(x)\big)$

Interpretación: Algún S es P
$\exists x\,\big(S(x) \wedge P(x)\big)$

Cada persona ama a alguien mas.

$$\underbrace{\underbrace{\text{Para cada}}_{\forall p}\ \underbrace{\text{persona } \boldsymbol{p},}_{persona(p)}\ \underbrace{\underbrace{\text{existe una}}_{\exists q}\ \underbrace{\text{persona } \boldsymbol{q},}_{persona(q)}\ \underbrace{\text{distinta de } \boldsymbol{p},}_{p \neq q}\ \underbrace{\text{tal que } \boldsymbol{p} \text{ ama a } \boldsymbol{q},}_{Ama(p,q)}}}$$

$$\forall p\,\big(persona(p) \rightarrow \exists q(persona(q) \wedge p \neq q \wedge Ama(p,q))\big)$$

Ejemplo tomado de: link

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El orden importa

En los cuantificadores anidados el orden es muy importante porque determina la lógica de la afirmación. Cambiar el orden puede cambiar completamente el significado de una expresión.

Ejemplo 2: Usando los predicados

- $Persona(p)$: p es una persona
- $Ama(x, y)$: que indica que x ama a y,

Escriba una oración en lógica de primer orden que signifique:

“hay una persona a la que todos los demás aman”.

Ejemplo tomado de: [link]

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El orden importa

Ejemplo 2:

“hay una persona a la que todos los demás aman”

Lenguaje natural

- Hay una persona a la que todos los otros aman
- Existe una persona ***p*** a la que todas los demás aman.
- Existe una persona ***p*** a la que todas los demás personas aman.

Interpretación: Algún S es P
$\exists x\, (S(x) \land P(x))$

Existe una persona ***p*** a la que todas las demás personas aman

$\exists p\ (persona(p) \land \text{es amada por otras personas})$

Lenguaje natural

- ***p*** es amada por todos los demás
- Existe una persona ***p*** a la que todos los demás aman
- Existe una persona ***p,*** que es amada por cualquier otra persona ***q***
- Existe una persona ***p,*** tal que para toda persona ***q,*** distinta de ***p*** es amada por **q**

Interpretación: Todos los S son P
$\forall x\, (S(x) \rightarrow P(x))$

Existe una persona ***p,*** tal que para toda persona ***q,*** distinta de ***p*** es amada por **q**

$$\exists p\ \Big(persona(p) \land \forall q\big((persona(q) \land p \neq q) \rightarrow Ama(q,p)\big)\Big)$$

Ejemplo tomado de: link

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

El orden importa

Ejemplo 2:

hay una persona a la que todos los demás aman

Interpretación: Algún S es P
$\exists x\,\big(S(x) \wedge P(x)\big)$

Interpretación: Todos los S son P
$\forall x\,\big(S(x) \rightarrow P(x)\big)$

$$\underbrace{\text{Existe una}}_{\exists p}\ \underbrace{\text{persona } \boldsymbol{p}}_{persona(p)},\ \underbrace{\text{tal que para toda}}_{\forall q}\ \underbrace{\text{persona } \boldsymbol{q}}_{persona(q)},\ \text{si } \boldsymbol{q}\ \underbrace{\text{distinta de } \boldsymbol{p}}_{p \neq q},\ \text{entonces } \underbrace{\boldsymbol{q} \text{ ama a } \boldsymbol{p}}_{Ama(q,p)}$$

$$\exists p\ \Big(persona(p) \wedge \forall q\big(\big(persona(q) \wedge p \neq q\big) \rightarrow Ama(q,p)\big)\Big)$$

Ejemplo tomado de: link

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Declaraciones con múltiples cuantificadores

- Los cuantificadores anidados, son expresiones en las que un cuantificador (∃ o ∀) aparece dentro del alcance de otro.
- Debido a que muchos enunciados técnicamente importantes contienen tanto a ∃ como a ∀, es importante tener en cuenta los siguientes recomendaciones:
  1. **El orden importa**: Cambiar el orden de los cuantificadores cambia el significado lógico.
  2. **Cada cuantificador tiene su propia variable**: No se deben reutilizar nombres de variables ligadas (su alcance está determinado por el cuantificador que la introduce en la formula lógica) en el mismo contexto.
  3. **El alcance se extiende hasta el final de la subfórmula**: A menos que se usen paréntesis, el cuantificador domina todo lo que sigue.
  4. **Usar paréntesis para aclarar el alcance**: Siempre que haya duda sobre qué parte pertenece a qué cuantificador.
  5. **El dominio debe ser claro o explícito**: Se debe indicar (o asumir correctamente) de qué conjunto provienen las variables cuantificadas.

Cuantificadores anidados

Declaraciones con múltiples cuantificadores

- **Ejemplo**: Cual sería la expresión en lenguaje formal para: “Cada numero real tiene un inverso”.

Lenguaje natural	Lenguaje formal
• Cada numero real tiene un inverso. • Todo numero real tiene un inverso.	$\forall x \exists y\, P(x, y)$

- Para dar mas contexto, vamos a referirnos al inverso aditivo, que para todo numero x existe un numero y tal que $x + y = 0$. Con esto, el predicado queda como: $\boldsymbol{P(x, y)}: x + y = 0$, esto es:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \mid x + y = 0 \qquad \forall x \exists y (x + y = 0)$$

- Lo anterior puede ser pensado como si se tuvieran funciones proposionales anidadas:

$$\forall x Q(x) \xrightarrow{Q(x) = \exists y P(x, y)} \forall x \exists y \big(P(x, y)\big) \xrightarrow{P(x, y): x + y = 0} \forall x \exists y (x + y = 0)$$

Cuantificadores anidados

Ejemplos

1. Empleando cuantificadores, exprese la ley conmutativa de la adición para los numero reales.

Solución:

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, (x + y = y + x)}$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\, \big(\forall y \in \mathbb{R}\, (x + y = y + x)\big)}$ $\boxed{\forall x \forall y\, (x + y = y + x)}$

2. Empleando cuantificadores, exprese la ley del inverso para la suma.

Solución:

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\, (x + y = 0)}$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\, \big(\exists y \in \mathbb{R}\, (x + y = 0)\big)}$ $\boxed{\forall x \exists y\, (x + y = 0)}$

3. Empleando cuantificadores, exprese la propiedad asociativa para la suma.

Solución:

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\, \forall z \in \mathbb{R}\, (x + (y + z) = (x + y) + z)}$

$\boxed{\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)}$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\, \Big(\forall y \in \mathbb{R}\, \big(\forall z \in \mathbb{R}\, (x + (y + z) = (x + y) + z)\big)\Big)}$

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplos

4. Diga con palabras lo que se significa la siguiente expresión en lógica de predicados:

$$\forall x \forall y\left((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow xy > 0\right)$$

Solución: La expresión anterior dice lo siguiente:

"Para todo número real x y para todo número real y, si x es positivo y y es negativo, entonces el producto xy es negativo."

Lo cual no es mas que la ley de signos, es decir: "El producto de cualquier número positivo por cualquier número negativo es siempre un número negativo".

Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación entre los cuantificadores y los ciclos anidados

Los cuantificadores anidados están relacionados con los ciclos anidados:

- Para evaluar $\forall x \forall y\, P(x, y)$, se recorre todo el x del dominio.
    - En cada paso, recorre los valores se hace el recorrido sobre todos los valores de y.
    - **Caso falso**: Si para algún par de valores x e y, $P(x, y)$ resulta ser falsa, entonces $\forall x \forall y\, P(x, y)$ es falsa, y tanto el bucle externo como el interno se terminan inmediatamente.
    - **Caso verdadero**: $\forall x \forall y\, P(x, y)$ es verdadera si el bucle externo finaliza tras recorrer todos los valores de x sin que se haya encontrado ninguna falsedad.
- Para evaluar $\forall x \exists y\, P(x, y)$, se recorre todo el x del dominio.
    - En cada paso, recorre los valores se hace el recorrido sobre todos los valores de y.
    - **Caso verdadero**: El ciclo interno termina cuando se encuentra un par de valores x e y, $P(x, y)$ es verdadera.
    - **Caso falso**: Si no se encuentra ningún y tal que $P(x, y)$ sea verdadera (para el x actual), el ciclo externo termina y se concluye que $\forall x \exists y\, P(x, y)$ es falso.
- Si los dominios de las variables son infinitos, entonces este proceso no puede llevarse a cabo en la práctica.

Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación entre los cuantificadores y los ciclos anidados

Los cuantificadores anidados operan sobre múltiples variables, y los ciclos anidados iteran sobre múltiples colecciones o dimensiones.

Caso 1. Cuantificador universal $(\forall) \approx$ **ciclo `for`**

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Idea clave: Si un solo par no cumple, todo es falso.

```
es_valido = True
for x in A:
    for y in B:
        if not P(x, y):
            es_valido = False
    if not es_valido:
        break
```

Caso 2: Cuantificador universal $(\exists) \approx$ **ciclo con `break` al encontrar el caso verdadero**

$$\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Idea clave: Solo se necesita una pareja que cumpla la condición.

```
es_valido = False
for x in A:
    for y in B:
        if P(x, y):
            es_valido = True
    if es_valido:
        break
```

Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación entre los cuantificadores y los ciclos anidados

Caso 3: Combinación de ∀ y ∃ (∀): Importa el orden

$$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}, \exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Idea clave: Para cada x, debe existir al menos un y que cumpla.

```
es_valido = True

for x in A:
    encontrado = False
    for y in B:
        if not P(x, y):
            encontrado = True
            break
    if not encontrado:
        es_valido = True
        break
```

$$\exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{B}, \forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Idea clave: Basta con un x que funcione con todos los y.

```
es_valido = False

for x in A:
    todos_y_cumplen = True
    for x in A:
        if not P(x, y):
            todos_y_cumplen = False
            break
    if todos_y_cumplen:
        es_valido = False
        break
```

Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación entre los cuantificadores y los ciclos anidados

Caso 3: Combinación de ∀ y ∃ (∀): Importa el orden

$$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}, \exists \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Idea clave: Para cada y, debe existir al menos un x que cumpla.

```
es_valido = True

for y in B:
    encontrado = False
    for x in A:
        if not P(x, y):
            encontrado = True
            break
    if not encontrado:
        es_valido = False
        break
```

$$\exists \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{B}, \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{A}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

Idea clave: Basta con un y que funcione con todos los x.

```
es_valido = False

for y in B:
    todos_x_cumplen = True
    for x in A:
        if not P(x, y):
            todos_x_cumplen = False
            break
    if todos_x_cumplen:
        es_valido = True
        break
```

Cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relación entre los cuantificadores y los ciclos

La siguiente tabla comparativa resume la relación de cuantificadores para dos variables:

Caso	#	Expresión lógica	Descripción	Verdadera	Falsa
1	1	$\forall x \forall y\ P(x, y)$	Para todo x y para todo y, P(x, y)	P(x, y) se cumple para **todas** las combinaciones posibles de x e y	Existe al menos un par (x, y) tal que P(x, y) es falsa
2	2	$\exists x \exists y\ P(x, y)$	Existe al menos un x y un y tal que P(x, y)	Existe al menos un par (x, y) tal que P(x, y) es verdadera	Para **todas** las combinaciones (x, y), P(x, y) es falsa
3	3	$\forall x \exists y\ P(x, y)$	Para todo x, existe **algún y** tal que se cumple P(x, y)	Para **cada x**, existe al menos un y tal que P(x, y) es verdadera	Existe algún x para el cual **ningún y** cumple P(x, y)
	4	$\exists x \forall y\ P(x, y)$	Existe un x tal que para **todo y** se cumple P(x, y)	Existe al menos un x tal que para **todos** los y se cumple P(x, y)	Para **cada x** hay al menos un y que no cumple P(x, y)
	5	$\forall y \exists x\ P(x, y)$	Para todo y, existe **algún x** tal que se cumple P(x, y)	Para **cada y**, existe al menos un x tal que P(x, y) es verdadera	Existe algún y para el cual **ningún x** cumple P(x, y)
	6	$\exists y \forall x\ P(x, y)$	Existe un y tal que para **todo x** se cumple P(x, y)	Existe al menos un y tal que para **todos** los x se cumple P(x, y)	Para **cada y** hay al menos un x que no cumple P(x, y)

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplos

Ejemplo 1: Sea ***U*** el conjunto de los números reales y el predicado $P(x, y): x \cdot y = 0$. ¿Cual es el valor de la verdad para cada una de las siguientes expresiones lógicas:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplos

Ejemplo 1: Sea ***U*** el conjunto de los números reales y el predicado $P(x,y): x \cdot y = 0$. ¿Cual es el valor de la verdad para cada una de las siguientes expresiones lógicas:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$

   Solución: Para el caso $\forall x \forall y\ P(x,y) \equiv \forall x \forall y\ (x \cdot y = 0) \equiv$ **Falso** ya que; si se toma $x = 1$ y $y = 1$, $x \cdot y = 1 \cdot 1 \neq 0$

2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$

   Solución: Para el caso $\forall x \exists y\ P(x,y) \equiv \forall x \exists y\ (x \cdot y = 0) \equiv$ **Verdadero** ya que basta que existe un solo valor de y para que la expresión del predicado sea verdadera sin importar el valor de x; lo cual se da cuando $y = 0$, pues $x \cdot 0 = x \cdot 0 = 0$

3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$

   Solución: Para el caso $\exists x \forall y\ P(x,y) \equiv \exists x \forall y\ (x \cdot y = 0) \equiv$ **Verdadero** pues existe un valor de x $(x = 0)$, que hace que el producto $x \cdot y = 0$ sin importar el valor de y; esto es $x \cdot y = 0 \cdot y = 0$

4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 0)$

   Solución: Para el caso $\exists y \forall x\ P(x,y) \equiv \exists y \forall x\ (x \cdot y = 0) \equiv$ **Verdadero** pues con que exista un solo par (x,y) para el que el producto sea 0 es suficiente. Por ejemplo, este par puede ser $(x \cdot y) = (-3.2{,}0)$ ya $\mathrm{P}(-3.2{,}0) = (-3.2) \cdot 0 = 0$

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplos

Ejemplo 2: Sea ***U*** el conjunto de los números reales y el predicado $P(x, y): x \cdot y = 1$. ¿Cual es el valor de la verdad para cada una de las siguientes expresiones lógicas:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 1)$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 1)$
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 1)$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}\ (x \cdot y = 1)$

Solución: Si realiza usted mismo el procedimiento. Los resultados serán:

1. $\forall x \forall y\ (x \cdot y = 1) \equiv$ **Falso**
2. $\forall x\ \exists y\ (x \cdot y = 1) \equiv$ **Falso**
3. $\exists x \forall y\ (x \cdot y = 1) \equiv$ **Falso**
4. $\exists x \exists y\ (x \cdot y = 1) \equiv$ **Verdadero**

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplos

Ejemplo 3: Sea el predicado $P(x, y)$: $x + y = y + x$ ¿Cuáles son los valores de verdad para los cuantificadores $\forall x \forall y P(x, y)$ y $\forall y \forall x P(x, y)$ donde el dominio de las variables es el conjunto de todos los números reales?

Solución: En el caso, ambos cuantificadores $\forall x \forall y P(x, y)$ y $\forall y \forall x P(x, y)$ denotan la misma proposición, esto es:

Proposición	Enunciado
$\forall x \forall y P(x, y)$	Para todos los números reales x, para todos los números reales y, se cumple que $x + y = y + x$
$\forall y \forall x P(x, y)$	Para todos los números reales y, para todos los números reales x, se cumple que $x + y = y + x$

Dicha proposición es la propiedad conmutativa para la suma de los números reales, en otras palabras: “Para cualquier par de números reales, el orden de la suma no altera el resultado” o “La suma de dos números reales cualesquiera es conmutativa”.

Nota de utilidad: Cuando los cuantificadores anidados de la expresión son los mismos, el valor de la verdad no cambia pues en el fondo se esta diciendo lo mismo:

$$\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$$

$$\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$$

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplos

Ejemplo 4: Sea el predicado $Q(x,y): x+y=0$ ¿Cuáles son los valores de verdad para los cuantificadores $\exists y \forall x Q(x,y)$ y $\forall x \exists y Q(x,y)$ donde el dominio de las variables es el conjunto de todos los números reales?

Solución: En la siguiente tabla se muestra el análisis

Proposición	Enunciado	Valor de la verdad
$\exists y \forall x Q(x,y)$	Existe un numero real y para el que cualquier numero real x cumple que $x+y=0$	**Falso**: Pues al menos un caso para el cual $\mathrm{Q}(x,y)$ no se cumple. Por ejemplo, para $y=6$ y $x=0$, el predicado $\mathrm{Q}(x,y)=\mathrm{Q}(6{,}0)=6+0=6\neq 0$ no se cumple.
$\forall x \exists y Q(x,y)$	Para todo numero real x, existe al menor un real y, tal que $x+y=0$	**Verdadero**: Pues con que existe mínimo un caso para el que se cumpla el predicado $\mathrm{Q}(x,y)$ la proposición es verdadera. Por ejemplo, para $x=6$ y $y=-6$ es uno de los casos que hacen verdadero el predicado $\mathrm{Q}(x,y)=\mathrm{Q}(6,-6)=6+(-6)=0$

Recordatorio importante: Cuando los cuantificadores anidados de la expresión son diferentes, el valor de la verdad de la proposición cambia al cambiar el orden de estos. En otras palabras, para este caso, **el orden es importante**:

$$\exists y \forall x P(x,y) \not\equiv \forall x \exists y P(x,y)$$

Cuantificadores anidados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplos

Ejemplo 5: Sea el predicado $Q(x, y, z): x + y = z$ ¿Cuáles son los valores de verdad para los cuantificadores $\forall x \forall y \exists z\ Q(x, y, x)$ y $\exists z \forall x \forall y\ Q(x, y, z)$ donde el dominio de las variables es el conjunto de todos los números reales?

Solución: En la siguiente tabla se muestra el análisis

Proposición	Enunciado	Valor de la verdad
$\forall x \forall y \exists z\ Q(x, y, x)$	Para cualquier par de números reales (x, y) existe un z para el que se cumple que $x + y = z$	**Verdadero**: Ya que la suma de la suma de dos números reales siempre da un número real (propiedad de la cerradura para la suma).
$\exists z \forall x \forall y\ Q(x, y, z)$	Existe un numero z, tal que para todos los x, y se cumple que $x + y = z$	**Falso**: No existe un único z que sea igual para todas las sumas. Por ejemplo: • Si $x = 2$ y $y = 3$, entonces $z = 5$ • Si $x = -2$ y $y = 3$, entonces $z = 1$

Agenda

- Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden
- Repaso sobre los cuantificadores
- Equivalencias en lógica de predicados
- Ejemplos 1
- Cuantificadores anidados
- **Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal**
- Ejemplos 2

Lenguaje informal .vs. Lenguaje formal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Claves para traducir cuantificadores anidados a lógica de primer orden

A continuación se muestran algunas claves para traducir expresiones en lenguaje natural a lógica de primer orden (LFO) cuando hay cuantificadores anidados:

1. **Identifique el dominio de cada variable**:
   - ¿De qué universo hablamos? Personas, números reales, objetos…
   - Ejemplo: "todo número real", "algún estudiante", "toda ciudad".
2. **Relacione palabras clave con el tipo de cuantificador**:

Lenguaje natural	Cuantificador lógico
"Todo", "Cada", "Cualquier“, “Para todo“	$\forall$
"Existe", "Hay al menos uno", "Algún"	$\exists$

Lenguaje informal .vs. Lenguaje formal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

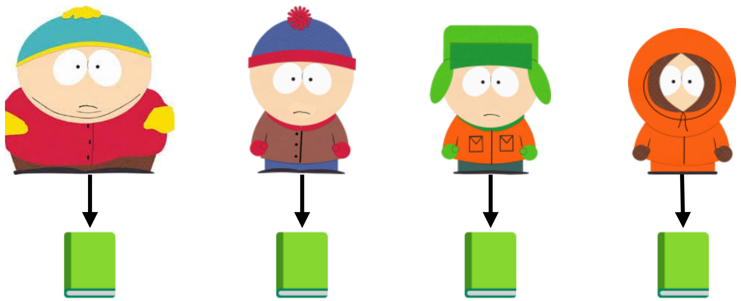
Claves para traducir cuantificadores anidados a lógica de primer orden

3. **El orden de los cuantificadores si importa**: Es decir $\forall x \exists y\ P(x,y) \not\equiv \exists y \forall x\ P(x,y)$. La siguiente tabla muestra como cambia el sentido de la expresión si cambia el orden de aparición de los cuantificadores:

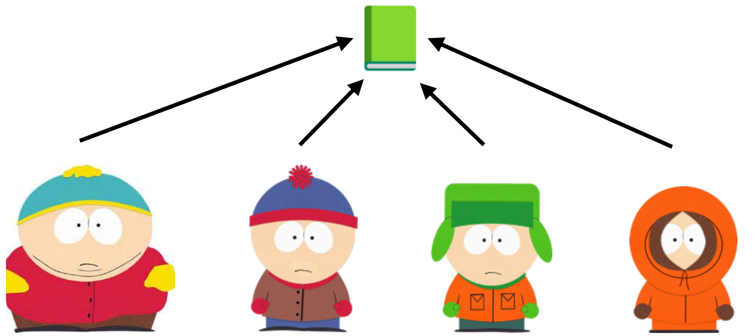
Expresión en FOL	Frase en lenguaje natural	Significado
$\forall x \exists y\ P(x,y)$	Para todo x existe un y tal que…	Para cada x, existe un y (que puede depender de x) tal que $P(x,y)$ es verdadero.
$\exists y \forall x\ P(x,y)$	Existe un y que sirve para todo x	Existe un y (el mismo para todos los x) tal que para todo x, $P(x,y)$ es verdadero.

La traducción correcta depende del flujo de la frase.

Todo estudiante tiene un libro: $\forall x \exists y\ Tiene(e,l)$



Hay un libro que todos los estudiantes tienen: $\exists y \forall x\ Tiene(e,l)$



Lenguaje informal .vs. Lenguaje formal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Claves para traducir cuantificadores anidados a lógica de primer orden

4. **Descomponga la oración**: Divida la oración en parte mas simples:
   - **Sujeto**: quién o qué
   - **Relación (verbo/predicado)**: qué ocurre entre sujetos
5. **Represente claramente los predicados**:
   - Use nombres claros: $lee(x, y)$ para x lee y; $amigo(x, y)$ para x es amigo de y
   - Agregue condiciones en caso de ser necesario: $x \neq y$, $libro(y)$, $mayor(x, y)$

Cada profesor supervisa a un estudiante

Elemento	Valor	Expresión
Sujetos	Profesor	$profesor(p)$: p es profesor
	Estudiante	$estudiante(e)$: e es estudiante
Relaciones	Supervisa	$supervisa(p, e)$: p supervisa a e

Para todo p, Si p es profesor, existe al menos un estudiante e es que supervisado por p

$$\forall p \left(profesor(p) \rightarrow \exists e \left(estudiante(e) \land supervisa(p, e) \right) \right)$$

Lenguaje informal .vs. Lenguaje formal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Claves para traducir cuantificadores anidados a lógica de primer orden

6. **Delimite bien las formulas**: El significado de lo que se quiere decir depende del alcance.
   - Usa paréntesis para agrupar lo que pertenece a cada cuantificador.
   - Controla el alcance (scope) de los cuantificadores.

Cada niño tiene un adulto que lo cuida

$$\forall x\left(niño(x) \rightarrow \exists y\big(adulto(y) \land cuida(y,x)\big)\right)$$

Existe un adulto y tal que cuida a todos los niños.

$$\exists y\left(adulto(y) \land \forall x\big(niño(x) \land cuida(y,x)\big)\right)$$

Lenguaje informal .vs. Lenguaje formal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Claves para traducir cuantificadores anidados a lógica de primer orden

7. **Use trucos para identificar estructuras comunes**: Existen patrones repetitivos en el lenguaje natural que se traducen de formas similares en lógica de primer orden, para identificarlos es necesario entrenarse haciendo ejercicios, sin embargo la siguiente tabla puede ayudar:

Lenguaje natural	Forma	Explicación	Ejemplo
Todo P es Q	$\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\big)$	Si algo es P, entonces también es Q	Todo perro es mamífero: $\forall x(perro(x) \rightarrow mamifero(x))$
Algún P es Q	$\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big)$	Existe al menos un P que es Q	Algun estudiante es curioso: $\exists x\big(estudiante(x) \wedge curioso(x)\big)$
Cada uno tiene algo	$\forall x \exists y\ R(x,y)$	A cada individuo le corresponde su propio "algo"	Cada niño tiene una madre: $\forall x\Big(niño(x) \rightarrow \exists y\big(madre(y) \wedge madreDe(x,y)\big)\Big)$
Algo que todos comparten	$\exists y \forall x\ R(x,y)$	Existe un único "algo" válido para todos	Hay un libro que todos leen: $\exists y\Big(libro(y) \wedge \forall x\big(persona(x) \rightarrow lee(x,y)\big)\Big)$

Lenguaje informal .vs. Lenguaje formal

Claves para traducir cuantificadores anidados a lógica de primer orden

7. **Use trucos para identificar estructuras comunes**: Existen patrones repetitivos en el lenguaje natural que se traducen de formas similares en lógica de primer orden, para identificarlos es necesario entrenarse haciendo ejercicios, sin embargo la siguiente tabla puede ayudar:

Lenguaje natural	Forma	Explicación	Ejemplo
Si P entonces Q	$\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$	Toda afirmación condicional es una implicación	Si alguien es profesor, entonces trabaja $\forall x(profesor(x) \rightarrow trabaja(x))$
No todo P es Q	$\neg\forall x\,(P(x) \rightarrow Q(x))$ $\equiv \exists x\,(P(x) \wedge \neg Q(x))$	La negación del todo equivale a la existencia de una excepción	No todos los estudiantes aprueban $\exists x(estudiante(x) \wedge \neg noAprueba(x))$
Nadie es P	$\neg\exists x\, P(x) \;\equiv \forall x\, \neg P(x)$	No hay ningún P que cumpla con la propiedad	Nadie entiende a Homero $\forall x(\neg entiende(x, Homero))$

Lenguaje informal .vs. Lenguaje formal

Claves para traducir cuantificadores anidados a lógica de primer orden

8. **Tenga en cuenta condiciones especificas**:
   - **Desigualdad**: $x \neq y$
   - **Propiedades**: $Est(x)$, $Libro(y)$

   Ejemplo: Cada persona ama a alguien **mas**.

$$\forall p \exists q (Persona(p) \wedge persona(q) \wedge p \neq q \wedge Ama(p, q))$$

Agenda

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

- Repaso conceptos claves de la lógica de primer orden
- Repaso sobre los cuantificadores
- Equivalencias en lógica de predicados
- Ejemplos 1
- Cuantificadores anidados
- Lenguaje formal .vs. Lenguaje informal
- **Ejemplos 2**

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enunciados

1. Escriba la equivalencia en lenguaje natural para la siguiente expresión en lógica de predicados:

$$\forall x \left(C(x) \lor \exists y \left(C(y) \land F(x,y) \right) \right)$$

Donde:

- $C(x)$: x tiene un computador.
- $F(x,y)$: x y y son amigos.
- Dominio: El domino para x y y consta de todos los estudiantes de la escuela.

2. Empleando las mismas funciones y dominio del punto anterior pero agregando una nueva variable z perteneciente a este dominio traduzca a lenguaje natural la siguiente formula:

$$\exists x \forall y \forall z \left(F(x,y) \land F(x,z) \land y \neq z \rightarrow \neg F(y,z) \right)$$

Ejemplos 2

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Enunciados

3. Exprese el siguiente enunciado “Si una persona es mujer y es madre, entonces esa persona es la madre de alguien” como una expresión lógica que use predicados, conectores lógicos y cuantificadores. El dominio consiste en todas las personas.
4. Exprese el siguiente enunciado “Todos tienen un único mejor amigo” como una expresión lógica que use predicados, conectores lógicos y cuantificadores. El dominio consiste en todas las personas.
5. Use cuantificadores para expresar “Hay una mujer que ha tomado un vuelo en todas las aerolíneas del mundo” (**Hágalo usted mismo**).

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1 - Solución

1. Escriba la equivalencia en lenguaje natural para la siguiente expresión en lógica de predicados:

$$\forall x\left(C(x) \vee \exists y\big(C(y) \wedge F(x,y)\big)\right)$$

Solución

Dominio	$U = \{Todos\ los\ estutiantes\ de\ la\ escuela\}$
Variables	$x, y \in U$
Constantes	---
Predicados	• $C(x)$: x tiene un computador. • $F(x,y)$: x y y son amigos.

$$\forall x\left(C(x) \vee \exists y\big(C(y) \wedge F(x,y)\big)\right)$$

Lenguaje natural

Para cada estudiante x en la escuela, x tiene un computador o hay un estudiante y tal que y tiene un computador y x y y son amigos

Lenguaje natural (mejorado)

Cada estudiante de la escuela tiene un computador o tiene un amigo que tiene un computador.

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

Ejemplo 2 - Solución

2. Empleando las mismas funciones y dominio del punto anterior pero agregando una nueva variable z perteneciente a este dominio traduzca a lenguaje natural la siguiente formula:

$$\exists x \forall y \forall z \left(F(x,y) \land F(x,z) \land y \neq z \rightarrow \neg F(y,z) \right)$$

Dominio	$U = \{Todos\ los\ estutiantes\ de\ la\ escuela\}$
Variables	$x, y, z \in U$
Constantes	---
Predicados	• $C(x)$: x tiene un computador. • $F(x,y)$: x y y son amigos.

Solución

$$\exists x \forall y \forall z \left(\underline{F(x,y) \land F(x,y) \land y \neq z \rightarrow \neg F(y,z)} \right)$$

$$F(x,y) \land F(x,y) \land y \neq z \rightarrow \neg F(y,z)$$

Lenguaje natural

Si los estudiantes x e y son amigos, y los estudiantes x y z son amigos, y además, si y y z no son el mismo estudiante, entonces y y z no son amigos.

Lenguaje natural

Existe un estudiante x tal que, para todos los estudiantes y y todos los estudiantes z distintos de y, si x e y son amigos, y x y z son amigos, entonces y y z no son amigos.

Lenguaje natural (mejorado)

Hay un estudiante cuyos amigos no son amigos entre sí.

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 3 - Solución

3. Exprese el siguiente enunciado "Si una persona es mujer y es madre, entonces esa persona es la madre de alguien" como una expresión lógica que use predicados, conectores lógicos y cuantificadores. El dominio consiste en todas las personas.

Dominio	$U = \{Todas\ las\ personas\}$
Variables	$x, y \in U$
Constantes	---
Predicados	• $mujer(x)$: x es mujer. • $parentezco(x)$: x es padre o madre. • $madre\_de(x, y)$: x es madre de y

Si una persona es mujer y es madre, entonces esa persona es la madre de alguien

Lenguaje natural (reescritura)

Para cada persona x, si la persona x es mujer y la persona x es padre o madre, entonces existe una persona y tal que la persona x es la madre de la persona y.

Expresión lógica

$$\forall x \left(mujer(x) \land parentezco(x) \rightarrow \exists y\ madre\_de(x, y) \right)$$

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

Ejemplo 4 - Solución

4. Exprese el siguiente enunciado "Todos tienen un único mejor amigo" como una expresión lógica que use predicados, conectores lógicos y cuantificadores. El dominio consiste en todas las personas.

Dominio	$U = \{Todas\ las\ personas\}$
Variables	$x, y \in U$
Constantes	---
Predicados	• $B(x, y)$: y es el mejor amigo x

Solución 1:
Empleando el cuantificador de unicidad.

Todos tienen un único mejor amigo

Lenguaje natural (reescritura)

Para cada persona x, existe una sola persona y que es el mejor amigo de x.

Expresión lógica

$\forall x \exists! y (B(x, y))$

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

Ejemplo 4 - Solución

4. Exprese el siguiente enunciado “Todos tienen un único mejor amigo” como una expresión lógica que use predicados, conectores lógicos y cuantificadores. El dominio consiste en todas las personas.

Solución 2:
Empleando los cuantificadores universales y existenciales.

Todos tienen un único mejor amigo

Lenguaje natural (reescritura 1)

Para toda persona x, existe exactamente una persona que es su mejor amigo.

Lenguaje natural (reescritura 2)

Existe una persona y tal que y es el mejor amigo de x, si alguna persona z distinta de y, entonces z no es el mejor amigo de y.

Expresión lógica

$$\exists y\left(B(x,y) \wedge \forall z\left(z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)\right)\right)$$

Para cada persona x, existe una persona y tal que y es el mejor amigo de x, y toda persona z distinta de y no es el mejor amigo de x.

Expresión lógica

$$\forall x\left(\exists y\left(B(x,y) \wedge \forall z\left(z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)\right)\right)\right)$$

Lenguaje formal .vs. lenguaje informal

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 4 - Solución

Comparación:
En la siguiente tabla se muestra una comparación en la que se muestran diferentes formas de decir lo mismo o casi lo mismo (para esto ultimo preste atención a la ultima fila).

Expresión lógica	¿Afirma que todos tienen un mejor amigo?	¿Afirma que todos tienen unicidad?
$\forall x \exists! y\left(B(x,y)\right)$	Si	Si (Por el operador de unicidad)
$\forall x \exists y \left(B(x,y) \land \forall z\left(z \neq y \rightarrow \neg B(x,z)\right)\right)$	Si	Si (Por que descarta todos los $z \neq y$)
$\forall x \left(\exists y\left(B(x,y)\right) \land \forall z(B(x,z) \rightarrow z = y)\right)$	Si	Si (Todo el que cumpla debe ser igual a y)
$\forall x \exists y \exists z(B(x,y) \land B(x,z) \land z = y)$	Si	No, por que solo dice que hay al menos dos iguales, pero no descarta terceros (no impide mas de dos).