Curso
Matemáticas Discretas I

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Clase 7 – Demostraciones

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Lógica proposicional
- Lógica cuantificacional
- Reglas de inferencia para enunciados con cuantificadores
- Ejemplos

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- **Lógica proposicional**
- Lógica cuantificacional
- Reglas de inferencia para enunciados con cuantificadores
- Ejemplos

Lógica proposicional

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Equivalencias lógicas

Equivalencia lógica

Dos proposiciones compuestas $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ son equivalentes si $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ es una tautología.

Construcción de equivalencias lógicas

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A} \equiv A_1 \\ \vdots \\ A_n \equiv \boldsymbol{B} \end{gathered}$$

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

Lógica proposicional

Reglas de inferencia

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore q$	Simplificación	$p \wedge q$ $\therefore p$
Modus Tollens	$p \to q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	Conjunción	p q $\therefore p \wedge q$
Silogismo hipotético (Transitividad)	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	Prueba de división por casos	$p \vee q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$p \vee q$ $\neg p$ $\therefore q$		
Adición	p $\therefore p \vee q$	Resolución	$\neg p \vee r$ $p \vee q$ $\therefore q \vee r$

Lógica proposicional

Demostración

Una demostración es una cadena de razonamientos en la que cada paso sigue lógicamente del anterior, con el objetivo de justificar que una conclusión se sigue necesariamente de un conjunto de premisas.

- En **lógica proposicional**, las demostraciones se construyen a partir de conectivos lógicos ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) siguiendo reglas como Modus Ponens, Eliminación de la conjunción, entre otras.

Notación de consecuentes

$$\begin{array}{l} \quad p \rightarrow q \\ \quad q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Tautología

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow q$$

Notación proposicional

$$(p \rightarrow q), q \vdash q$$

- En **lógica de predicados**, además se usan cuantificadores ($\forall$, $\exists$) y se aplican reglas como la instanciación universal o la generalización existencial.

Agenda

- Lógica proposicional
- **Lógica de predicados**
- Reglas de inferencia para enunciados con cuantificadores
- Ejemplos

Lógica de predicados

Equivalencia de los conectivos lógicos

Se emplean las mismas de la lógica proposicional:

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$	$P \vee Q \equiv Q \vee P$
Asociatividad	$P \wedge (Q \wedge R) \equiv (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R$
Distributividad	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
Idempotencia	$P \wedge P \equiv P$	$P \vee P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$
Identidad	$P \wedge \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \vee \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \wedge \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$
Complemento	$P \wedge \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \vee \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	

Lógica de predicados

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Equivalencia de los conectivos lógicos

La siguiente tabla muestra las equivalencias de los cuantificadores:

Nombre	Equivalencia lógica
Negación de cuantificadores (De Morgan cuántico)	$\neg\forall x\, P(x) \equiv \exists x\, \neg P(x)$ $\neg\exists x\, P(x) \equiv \forall x\, \neg P(x)$
Distributividad del cuantificador universal sobre la conjunción	$\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$
Distributividad (en un solo sentido) del cuantificador universal sobre la disyunción	$\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \rightarrow \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$
Distributividad del cuantificador existencial sobre la disyunción	$\exists x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \equiv \exists x\, P(x) \vee \exists x\, Q(x)$
Distributividad (en un solo sentido) del cuantificador existencial sobre la conjunción	$\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \rightarrow \exists x\, P(x) \wedge \exists x\, Q(x)$
Distribución de cuantificadores (restricciones)	Si la formula Q no contiene la variable cuantificada x: $\forall x(P(x) \vee Q) \equiv \big(\forall x\, P(x)\big) \vee Q$ $\exists x(P(x) \wedge Q) \equiv \big(\exists x\, P(x)\big) \wedge Q$
Intercambio del orden de cuantificadores iguales	$\forall x \forall y\, P(x,y) \equiv \forall y \forall x\, P(x,y)$ $\exists x \exists y\, P(x,y) \equiv \exists y \exists x\, P(x,y)$
No conmutatividad entre cuantificadores diferentes	$\forall x \exists y P(x,y) \not\equiv \exists y \forall x\, P(x,y)$

Agenda

- Lógica proposicional
- Lógica cuantificacional
- **Reglas de inferencia para enunciados con cuantificadores**
- Ejemplos

Reglas de inferencia con cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reglas de inferencia

- Los argumentos válidos con enunciados cuantificados consisten en una secuencia de afirmaciones. Cada afirmación es una premisa o se deduce de afirmaciones anteriores mediante reglas de inferencia, que incluyen:
  - Reglas de inferencia para la lógica proposicional
  - Reglas de inferencia para enunciados cuantificados
- Las reglas de inferencia para enunciados cuantificados se resumen en la siguiente tabla:

Regla	Nombre	Forma
$\forall I$	Instanciación universal (UI: Universal Instantiation)	$\forall x\, P(x) \Rightarrow P(c)$
$\forall G$	Generalización universal (UG: Universal Generalization)	$P(c) \Rightarrow \forall x\, P(x)$
$\exists I$	Instanciación existencial (EI: Existential Instantiation)	$\exists x\, P(x) \Rightarrow P(c)$
$\exists G$	Generalización existencial (EG: Existential Generalization)	$P(c) \Rightarrow \exists x\, P(x)$

Reglas de inferencia con cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Instanciación universal

- Es una regla que permite pasar de una **afirmación general** (válida para todos los elementos del dominio) a una **afirmación particular** (válida para un caso específico).
- **Forma general**

$$\frac{\forall x\ P(x)}{\therefore P(c)}$$

Si algo es cierto para todos, también lo es para uno en particular

- **Ejemplo**: Si el dominio del que se habla consiste de todos los perros y Firulais es un perro tenemos.

Dominio	$U = \{Todos\ perros\}$
Variables	$x \in U$
Constantes	• $x = \text{Firulais}$
Predicados	• $C(x)$: x es cariñoso

Todos los perros son cariñosos
Por lo tanto, Firulais es cariñoso.

$$\frac{\forall x\ C(x)}{\therefore C(\text{Firulais})}$$

Reglas de inferencia con cuantificadores

Generalización universal

- Esta regla permite afirmar que una propiedad se cumple para todos los elementos del dominio, si se logra demostrar que se cumple para un individuo arbitrario.
- **Forma general**

$$\frac{P(c) \text{ para un } c \text{ arbitrario}}{\therefore \forall x\, P(x)}$$

Restricción fundamental: La variable x debe ser arbitraria, es decir que no debe depender de una premisa o suposición previa sobre un valor particular.

- Esta regla suele ser usada a menudo de manera implícita en demostraciones matemáticas.

Reglas de inferencia con cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Instanciación existencial

- Es la regla que permite tomar una afirmación del tipo $\exists x\ P(x)$ y asumir que existe un individuo c para el cual $P(c)$ es verdadera
- **Forma general**

$$\frac{\exists x\ P(x)}{\therefore P(c) \text{ para un } c \text{ arbitrario}}$$

- **Ejemplo**: Hay alguien que saco un 5.0 en el curso. Si tomamos un individuo a cualquiera (bart por ejemplo), podemos decir que a saco un 5.0

Dominio	$U = \{Todos\ los\ estudiantes\}$
Variables	$x \in U$
Constantes	---
Predicados	• $N(x)$: x saco un 5.0

$$\frac{\exists x\ N(x)}{\therefore N(a)}$$

Reglas de inferencia con cuantificadores

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Generalización existencial

- Es la regla que permite pasar de una afirmación particular como $P(c)$ a una existencial como $\exists x\ P(x)$
- **Forma general**

$$\frac{P(c) \text{ para un } c \text{ arbitrario}}{\therefore \exists x\ P(x)}$$

Restricción fundamental: Si se conoce que alguien (o algo) cumple una propiedad, entonces se puede afirmar que existe al menos uno que la cumple

- **Ejemplo**: Si Bart saco un 5.0 en la clase podemos decir que al menos un estudiante saco un 5.0 en la clase.

Dominio	$U = \{Todos\ los\ estudiantes\}$
Variables	$x \in U$
Constantes	• $x = \text{Bart}$
Predicados	• $N(x)$: x saco un 5.0

$$\frac{N(\text{Bart})}{\therefore \exists x\ N(x)}$$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Lógica proposicional
- Lógica cuantificacional
- Reglas de inferencia para enunciados con cuantificadores
- **Ejemplos**

Ejemplos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Reglas de formulas

Nombre	Equivalencia lógica	
Conmutatividad	$P \land Q \equiv Q \land P$	$P \lor Q \equiv Q \lor P$
Asociatividad	$P \land (Q \land R) \equiv (P \land Q) \land R$	$P \lor (Q \lor R) \equiv (P \lor Q) \lor R$
Distributividad	$P \land (Q \lor R) \equiv (P \land Q) \lor (P \land R)$	$P \lor (Q \land R) \equiv (P \lor Q) \land (P \lor R)$
Idempotencia	$P \land P \equiv P$	$P \lor P \equiv P$
Doble negación	$\neg(\neg P) \equiv P$	
Leyes de Morgan	$\neg(P \land Q) \equiv \neg P \lor \neg Q$	$\neg(P \lor Q) \equiv \neg P \land \neg Q$
Identidad	$P \land \boldsymbol{V} \equiv P$	$P \lor \boldsymbol{F} \equiv P$
Dominación	$P \land \boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{F}$	$P \lor \boldsymbol{V} \equiv \boldsymbol{V}$
Absorción	$P \land (P \lor Q) \equiv P$	$P \lor (P \land Q) \equiv P$
Complemento	$P \land \neg P \equiv \boldsymbol{F}$	$P \lor \neg P \equiv \boldsymbol{V}$
Implicación	$P \rightarrow Q \equiv \neg P \lor Q$	
Contrarrecíproco	$P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$	
Equivalencia	$P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$	

Ejemplos

Reglas de formulas

Nombre	Regla de inferencia	Nombre	Regla de inferencia
Modus Ponens	$p \to q$ p $\therefore q$	Simplificación	$p \land q$ $\therefore p$
Modus Tollens	$p \to q$ $\neg q$ $\therefore \neg p$	Conjunción	p q $\therefore p \land q$
Silogismo hipotético (Transitividad)	$p \to q$ $q \to r$ $\therefore p \to r$	Prueba de división por casos	$p \lor q$ $p \to r$ $q \to r$ $\therefore r$
Silogismo disyuntivo (Eliminación)	$p \lor q$ $\neg p$ $\therefore q$		
Adición	p $\therefore p \lor q$	Resolución	$\neg p \lor r$ $p \lor q$ $\therefore q \lor r$

Ejemplos

Reglas de formulas

Nombre	Equivalencia lógica
Negación de cuantificadores (De Morgan cuántico)	$\neg\forall x\ P(x) \equiv \exists x\ \neg P(x)$ $\neg\exists x\ P(x) \equiv \forall x\ \neg P(x)$
Distributividad del cuantificador universal sobre la conjunción	$\forall x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \equiv \forall x\ P(x) \wedge \forall x\ Q(x)$
Distributividad (en un solo sentido) del cuantificador universal sobre la disyunción	$\forall x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \rightarrow \forall x\ P(x) \vee \forall x\ Q(x)$
Distributividad del cuantificador existencial sobre la disyunción	$\exists x\big(P(x) \vee Q(x)\big) \equiv \exists x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x)$
Distributividad (en un solo sentido) del cuantificador existencial sobre la conjunción	$\exists x\big(P(x) \wedge Q(x)\big) \rightarrow \exists x\ P(x) \wedge \exists x\ Q(x)$
Distribución de cuantificadores (restricciones)	Si la formula Q no contiene la variable cuantificada x: $\forall x(P(x) \vee Q) \equiv \big(\forall x\ P(x)\big) \vee Q$ $\exists x(P(x) \wedge Q) \equiv \big(\exists x\ P(x)\big) \wedge Q$
Intercambio del orden de cuantificadores iguales	$\forall x \forall y\ P(x,y) \equiv \forall y \forall x\ P(x,y)$ $\exists x \exists y\ P(x,y) \equiv \exists y \exists x\ P(x,y)$
No conmutatividad entre cuantificadores diferentes	$\forall x \exists y P(x,y) \not\equiv \exists y \forall x\ P(x,y)$

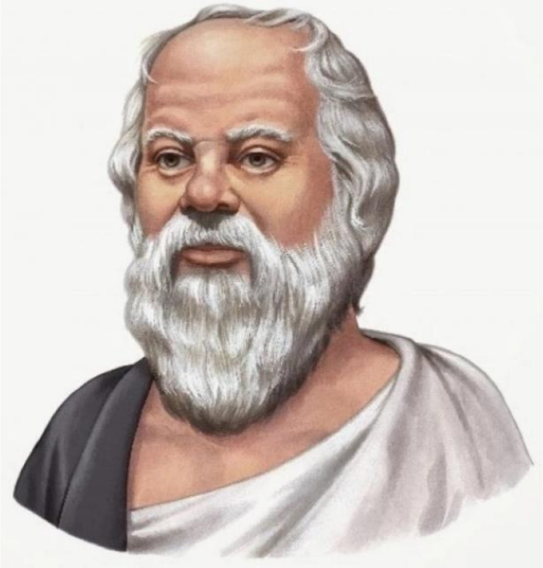
Regla	Nombre	Forma
$\forall I$	Instanciación universal	$\forall x\ P(x) \Rightarrow P(c)$
$\forall G$	Generalización universal	$P(c) \Rightarrow \forall x\ P(x)$
$\exists I$	Instanciación existencial	$\exists x\ P(x) \Rightarrow P(c)$
$\exists G$	Generalización existencial	$P(c) \Rightarrow \exists x\ P(x)$

Ejemplos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

Ejemplo: Demuestre que las premisas “Todos los hombres son mortales” y “Sócrates es un hombre” implican la conclusión “Sócrates es Mortal”.



Ejemplos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1

$$\begin{array}{ll} \forall x\big(hombre(x) \rightarrow mortal(x)\big) & (a) \\ hombre(\text{Socrates}) & (b) \\ \hline \therefore\ mortal(\text{Socrates}) & \end{array}$$

Dominio	U: Todos los estudiantes
Variables	x
Predicados	• $hombre(x)$: x es un hombre • $mortal(x)$: x es mortal

#	Enunciado	Representación
1	**Premisa1**: Todos los hombres son mortales	$\forall x\big(hombre(x) \rightarrow mortal(x)\big)$
2	**Premisa 2**: Sócrates es un hombre	$hombre(\text{Socrates})$
3	**Conclusión**: Sócrates es Mortal	$mortal(\text{Socrates})$

	Pasos	Razón
1	$\forall x\big(hombre(x) \rightarrow mortal(x)\big)$	Premisa **a**
2	$hombre(Socrates) \rightarrow mortal(\text{Socrates})$	Instanciación universal en **1**
3	$hombre(\text{Socrates})$	Premisa **b**
4	$mortal(\text{Socrates})$	Modus ponens **2** y **3**

Ejemplos

Ejemplo 2

Ejemplo: Demuestre que las premisas “Todos en esta clase de matemáticas discretas han tomado un curso de informática” y “Josefina es una estudiante de esta clase” implican la conclusión “Josefina ha tomado un curso de informática”.

Ejemplos

Ejemplo 2

$$\begin{array}{ll} \forall x\big(D(x) \rightarrow I(x)\big) & (a) \\ D(\text{Josefina}) & (b) \\ \hline \therefore I(\text{Josefina}) & \end{array}$$

Dominio	U: Todos los estudiantes
Variables	x
Predicados	• $D(x)$: x esta en Matematicas discretas • $I(x)$: x ha tomado un curso de informatica

#	Enunciado	Representación
1	**Premisa1**: Todos en esta clase de matemáticas discretas han tomado un curso de informática	$\forall x\big(D(x) \rightarrow I(x)\big)$
2	**Premisa 2**: Josefina es una estudiante de esta clase	$D(\text{Josefina})$
3	**Conclusión**: Josefina ha tomado un curso de informática	$I(\text{Josefina})$

	Pasos	Razón
1	$\forall x\big(D(x) \rightarrow I(x)\big)$	Premisa **a**
2	$D(\text{Josefina}) \rightarrow I(\text{Josefina})$	Instanciación universal en 1
3	$D(\text{Josefina})$	Premisa **b**
4	$I(\text{Josefina})$	Modus ponens **2** y **3**

Ejemplos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 3

Ejemplo: Demuestre que las premisas “Un estudiante de esta clase no ha leído el libro” y “Todos en esta clase aprobaron el primer examen” implican la conclusión “Alguien que aprobó el primer examen no ha leído el libro”.

Ejemplos

Ejemplo 3

$$\begin{array}{ll} \exists x\big(C(x) \land \neg L(x)\big) & (a) \\ \forall x\ \big(C(x) \rightarrow A(x)\big) & (b) \\ \hline \therefore\ \exists x\big(A(x) \land \neg L(x)\big) & \end{array}$$

Dominio	U: Todos los estudiantes
Variables	x
Predicados	• $C(x)$: x esta en esta clase • $L(x)$: x leyo el libro • $A(x)$: x aprobo el primer examen

#	Enunciado	Representación
1	**Premisa1**: Un estudiante de esta clase no ha leído el libro	$\exists x\big(C(x) \land \neg L(x)\big)$
2	**Premisa 2**: Todos en esta clase aprobaron el primer examen	$\forall x\ \big(C(x) \rightarrow A(x)\big)$
3	**Conclusión**: Alguien que aprobó el primer examen no ha leído el libro	$\exists x\big(A(x) \land \neg L(x)\big)$

	Pasos	Razón
1	$\exists x\big(C(x) \land \neg L(x)\big)$	Premisa **a**
2	$C(a) \land \neg L(a)$	Instanciación existencial en **1**
3	$C(a)$	Simplificación en **2**
4	$\forall x\ \big(C(x) \rightarrow A(x)\big)$	Premisa **b**
5	$C(a) \rightarrow A(a)$	Instanciación universal en **4**
6	$A(a)$	Modus Ponens **3** y **5**
7	$\neg L(a)$	Simplificación en **2**
8	$A(a) \land \neg L(a)$	Conjunción en **6** y **7**
9	$\exists x\big(C(x) \land \neg L(x)\big)$	Generalización existencial en **8**

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Curso de Matemáticas Discretas 1

Clase 7 – Demostraciones