Curso
Matemáticas Discretas I

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Clase 8 – Teoría de conjuntos

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- Tipos de conjuntos
- Operaciones con conjuntos
- Identidades
- Ejemplos
- Programación

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- Tipos de conjuntos
- Operaciones con conjuntos
- Identidades
- Ejemplos
- Programación

Introducción

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Contextualización

Piense en el juego de cubiertos (cutlery set) de la casa:

- **Tiene varios elementos**: Cucharas, tenedores, cuchillos.

- **Los elementos están agrupados**: En este caso, los tenedores, cuchillos y cucharas están en agrupados en un lugar común (soporte, cajon, caja, etc).

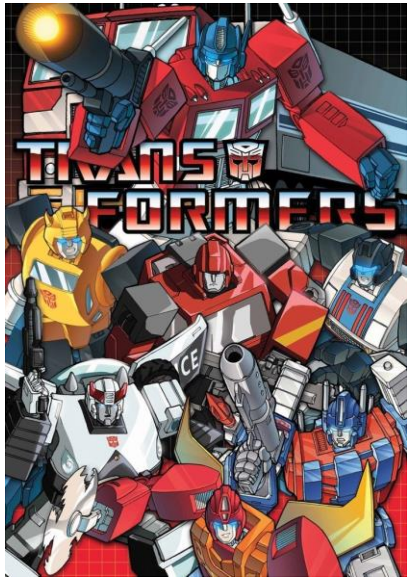
- **Pertenencia**: Cada elemento tiene unas características en particular.

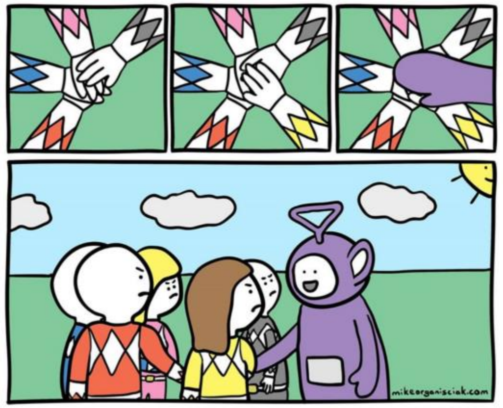
Introducción

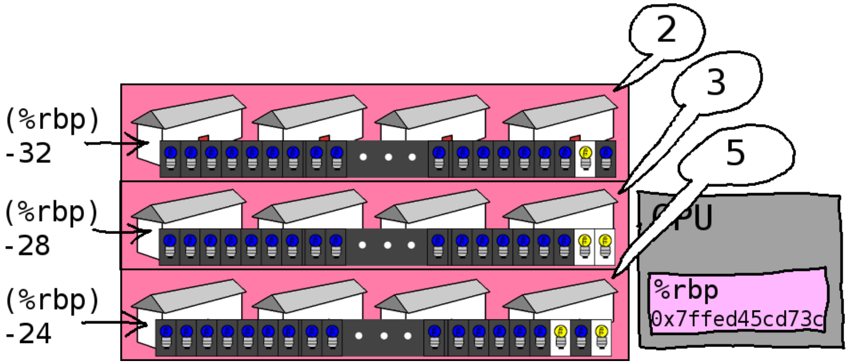
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Contextualización

Un conjunto no es mas que un grupo de elementos que a **agrupación** de elementos. Como veremos a lo largo de esta clase, esta noción puede ser extendida mas halla del problema del juego de cubiertos.



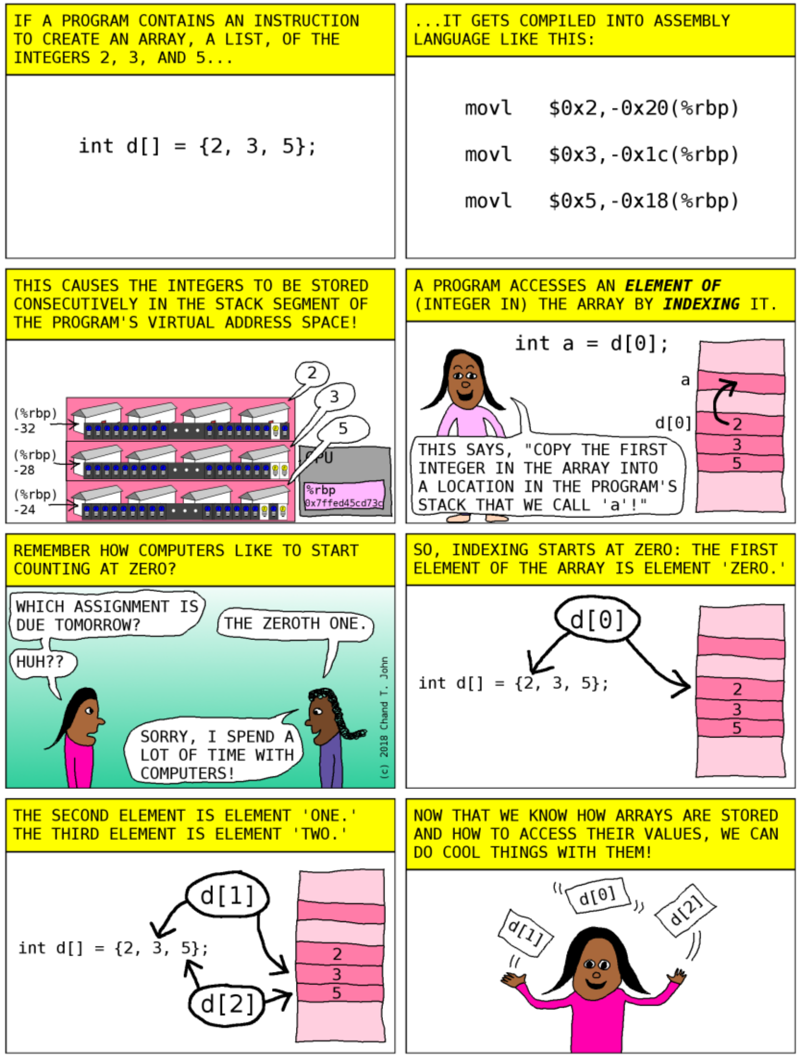




Lógica proposicional

Contextualización

Contexto	Conjunto	Elemento
Los Simpson	Familia Simpson: `Simpsons = {Homero, Marge, Bart, Lisa, Maggie}`	`Maggie`
Los Transformers	Autobots: `Autobots = {Optimus, Bumblebee, Ratchet,...}`	`Conjunción`
Los Power Rangers	Power Rangers: `PowerRangers = {Jason, Trini, Zack, Kimberly, Billy y Tommy}`	`Zack`
Los números reales	Numeros enteros: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$	`0`
Las onomatopeyas	Onomatopeyas de Batman: `Golpes = {bang!, pow!, sock!,...}`	`bang!`

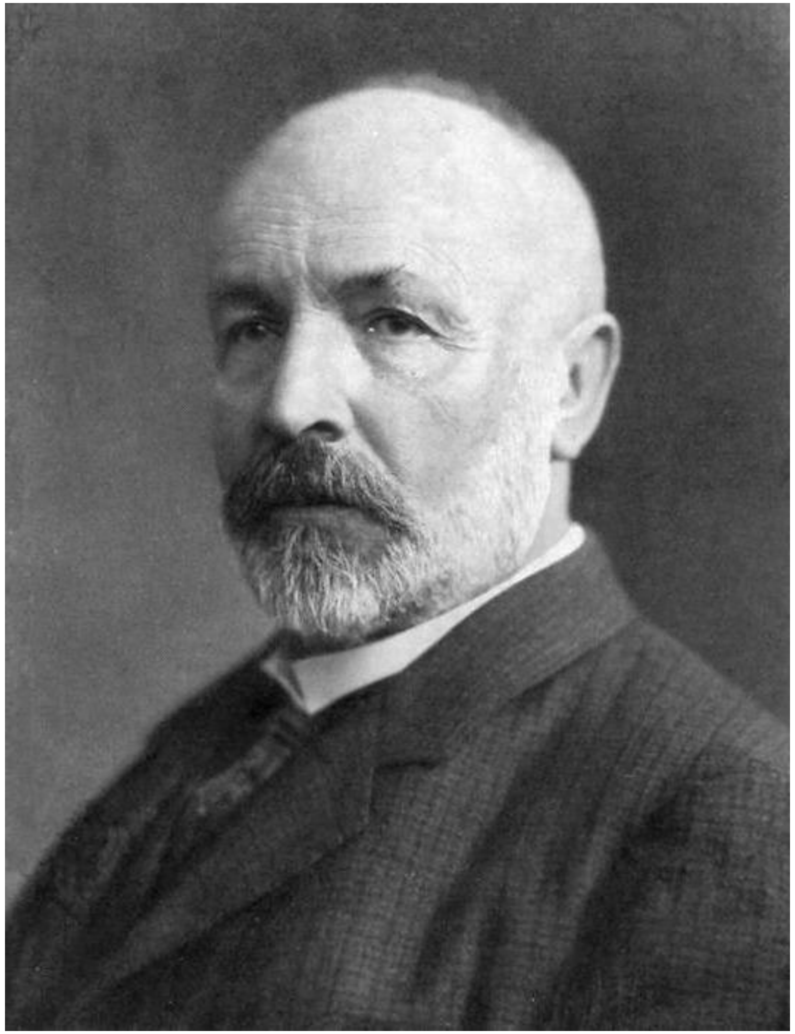


Ver: [link]

Introducción

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

George Cantor



Ver:

- **El Hombre Que Casi Rompe Las Matemáticas (Y A Sí Mismo...) (link)**
- **¿Cómo de infinito es el infinito? (link)**
- **¿Existen infinitos más grandes que otros? (link)**
- **La paradoja del Hotel Infinito (link)**

Introducción

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Para que sirven los conjuntos

- Los conjuntos son uno de los componentes básicos de los tipos de objetos considerados en matemáticas discretas.
  - Son importantes para el conteo.
  - Los lenguajes de programación tienen operaciones con conjuntos.
- La teoría de conjuntos es una rama importante de las matemáticas.
  - Se han utilizado diversos sistemas de axiomas para desarrollar la teoría de conjuntos
  - En esta clase teoría de conjuntos ingenua donde se explora la noción de conjuntos desde un punto de vista mas intuitivo y no tan axiomático.

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- **Conceptos básicos**
- Relaciones entre conjuntos
- Tipos de conjuntos
- Operaciones con conjuntos
- Identidades
- Ejemplos
- Programación

Conceptos básicos

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Conjunto y elemento

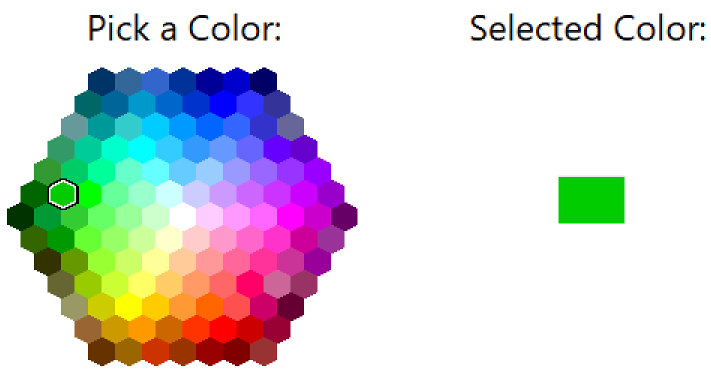
Para empezar, hay dos conceptos claves cuya comprensión es vital: Conjunto y elemento.

Conjunto
es una colección no ordenada de objetos que se consideran como una unidad. Estos objetos, que pueden ser números, letras, personas, colores, etc., se llaman **elementos** del conjunto.

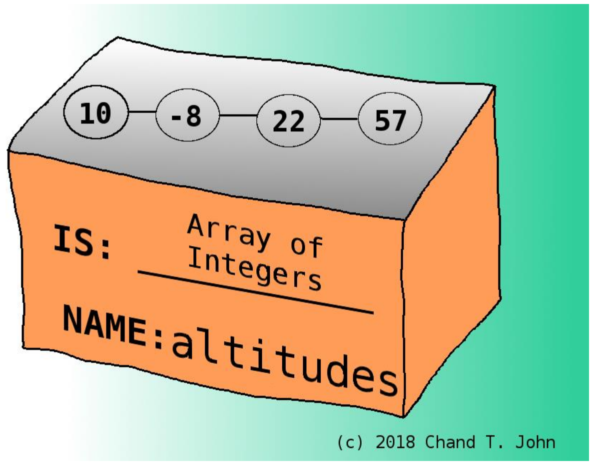
Elemento
Un elemento o miembro es un cada uno objetos individuales que forman parte de un conjunto

Conjunto

Elemento



Colors picker link



Conceptos básicos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Notación básica

Para referirnos a los conjuntos y a los elementos seguimos se siguen las siguientes convenciones

- Los conjuntos se representan usando letras mayúsculas (A, B, C, etc).
- Cada elemento de un conjunto se puede representar con una letra minúscula (a, b, c, etc).
- Pertenencia:
  - **Pertenencia ($\in$)**: Para decir que el elemento a **es** un miembro del conjunto A se emplea $a \in A$
  - **No pertenencia ($\notin$)**: Para decir que el elemento a **no** **esta** al conjunto A se emplea $a \notin A$

Ejemplo:

- Sea S el conjunto asociado la familia Simpson.
- Sea h el elemento que representa a Homero Simpson.
- Sea p el elemento asociado a Peter Griffin.

S

$h \in S$

$p \notin S$

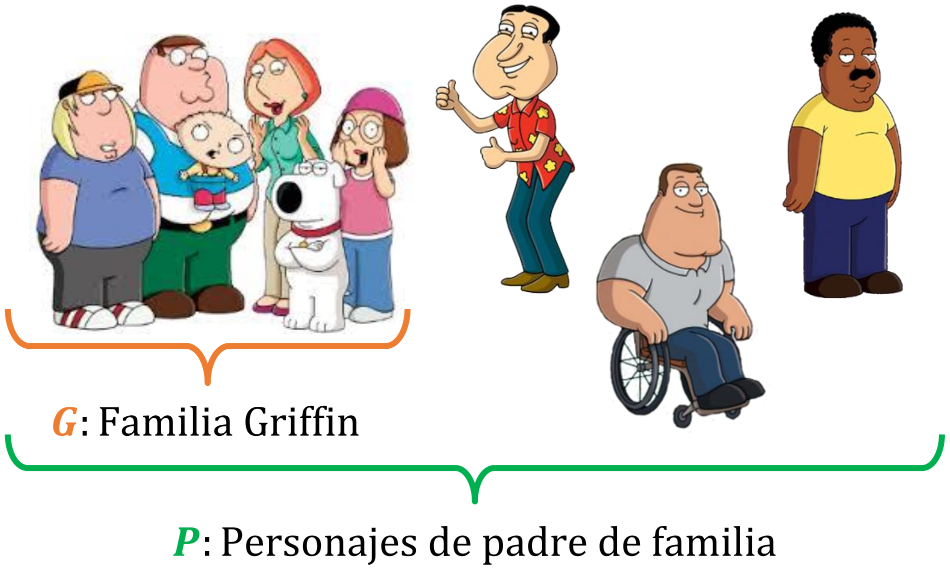
Conceptos básicos

Representación de conjuntos

Existen dos formas para representar conjuntos:

- **Notación por extensión**: En esta se listan cada uno de los elementos que pertenecen al conjunto.
- **Notación por comprensión**: En esta se especifica la característica común de los elementos que lo conforman.

Ejemplo: Sea G el conjunto asociado a la familia Griffin y P el conjunto asociado a todos los personajes del programa Padre de Familia. Realice la representación por extensión y comprensión.



Suponiendo que se tiene el siguiente predicado:

$$M(x): x \text{ es un miembro de la familia Griffing}$$

Representación por extensión:

$$G = \{Peter, Lois, Meg, Chris, Stewie, Brian\}$$

Representación por comprensión:

$$G = \{x \in P | x \text{ es un miembro de la familia Griffing}\}$$

$$G = \{x \in P | M(x)\}$$

Conceptos básicos

Representación por extensión (set-roster)

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

En una representación por comprensión, cada uno de los elementos del conjunto es listado entre llaves {}.

- Cada uno de los elementos listados es separado por comas.

$$S = \{a, b, c, d\}$$

- El orden en que se lista los elementos no importa.

$$S = \{a, b, c, d\} = \{b, c, a, d\}$$

- Los conjuntos se definen por los elementos que contienen, no por el orden ni por la cantidad de veces que se repiten.

$$S = \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, b, c, d\}$$

- Los puntos suspensivos (…) pueden usarse para describir un conjunto sin enumerar todos los miembros cuando el patrón es claro.

$$S = \{a, b, c, d, \dots, z\}$$

- Esta representación es útil cuando el conjunto es finito y pequeño.

Conceptos básicos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Representación por comprensión (set-builder)

En esta representación, el conjunto se define indicando una propiedad o condición que deben cumplir sus elementos, en lugar de enumerarlos uno por uno.

- Estructura general.

$$A = \{x \in D | \text{condicion que cumple } x\} = \{x \in D | P(x)\} = \{x | P(x)\}$$

Donde:

- $\boldsymbol{A}$: Nombre del conjunto.
- $\boldsymbol{x}$: Variable que representa los elementos.
- $\boldsymbol{D}$: Dominio o universo de discurso.
- $\textbf{Separador}$ (| ó :): Tal que.
- $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$: Condición que debe cumplir el elemento para pertenecer al conjunto.

- Esta representación es ideal para conjuntos infinitos o muy grandes y para expresar en las condiciones propiedades mas complejas (por ejemplo: $x^2 < 9$, x es primo, etc.)

Conceptos básicos

Representación de conjuntos - Comparación

La siguiente tabla muestra una comparación entre las diferentes formas de representar un conjunto:

Característica	Por extensión	Por comprensión
Descripción	Enumera todos los elementos del conjunto	Describe los elementos mediante una propiedad o condición
Forma general	$A = \{a, b, c, d, \dots\}$	$A = \{x \in D \mid P(x)\}$
Uso principal	Conjuntos pequeños y finitos	Conjuntos grandes o infinitos, o con reglas definidas
Ejemplos	Vocales	
	$V = \{a, e, i, o, u\}$	$V = \{x \mid x \text{ es una vocal}\}$
	Números positivos pares menores que 10:	
	$P = \{2,4,6,8\}$	$P = \{x \mid x \text{ es un numero par y } x < 10\}$

Conceptos básicos

Ejemplos

1. Escriba los siguientes conjuntos empleando las notaciones por extensión y comprensión:
   a. El conjunto de todas las vocales.
   b. El conjunto de todos los enteros positivos impares menores que 10.
   c. El conjunto de todos los enteros positivos menores que 100.
   d. El conjunto de todos los enteros menores que 100.
2. Cual es la notación por extensión y comprensión para los diferentes conjuntos numéricos dentro del campo de los reales:
   a. Números naturales
   b. Números enteros
   c. Números enteros positivos
   d. Números racionales
   e. Números irracionales
   f. Números reales
   g. Números reales positivos
   h. Números complejos

Conceptos básicos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 1 - Solución

En la siguiente tabla se muestra las representaciones por extensión y comprensión:

Característica	Por extensión	Por comprensión
El conjunto de todas las vocales	$V = \{a, e, i, o, u\}$	$V = \{x \in Abecedario \mid x \text{ es una vocal}\}$ $V = \{x \in \Sigma \mid x \in \{a, e, i, o, u\}\}$
El conjunto de todos los enteros positivos impares menores que 10.	$O = \{1, 3, 5, 7, 9\}$	$O = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x \text{ es impar y } x < 10\}$ $O = \{x \in \mathbb{N} \mid (x\ mod\ 2 = 1) \wedge (x < 10)\}$
El conjunto de todos los enteros positivos menores que 100.	$S = \{1, 2, 3, \dots, 98, 99\}$	$S = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x < 100\}$ $S = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x < 100\}$
El conjunto de todos los enteros menores que 0.	$S = \{\dots, -3, -2, -1\}$	$S = \mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$

Conceptos básicos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2 - Solución

En la siguiente tabla se muestra las representaciones por extensión y comprensión:

Característica	Por extensión	Por comprensión
Números naturales	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$
Números enteros	$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$	$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{Z}^{+} \mid x \text{ es impar y } x < 10\}$
Números enteros positivos	$\mathbb{Z}^{+} = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$	$\mathbb{Z}^{+} = \{x \in \mathbb{Z}^{+} \mid x > 0\}$
Números racionales	$\mathbb{Q} = \left\{\dots, -2, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, 2, 2.1, \dots\right\}$	$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} \middle\vert x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0\right\}$
Números irracionales	$\mathbb{I} = \{\dots, -\sqrt{3}, -\sqrt{2}, \pi, e, \dots\}$	$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$
Números reales	$\mathbb{R} = \left\{\dots, -2, -\sqrt{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, 2, 2.1, e, \pi \dots\right\}$	$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
Números reales positivos	$\mathbb{R}^{+} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 2.1, e, \pi \dots\right\}$	$\mathbb{R}^{+} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
Números complejos	$\mathbb{R} = \{\dots, -i, 1 + i, \sqrt{3} - 1, 3i, \dots\}$	$\mathbb{C} = \left\{a + bi \middle\vert a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\right\}$

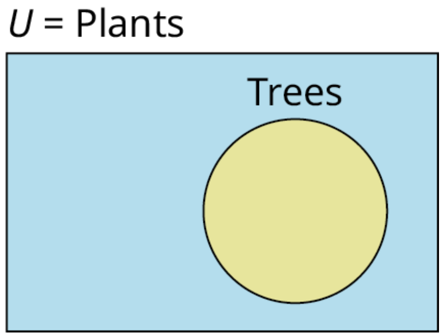
Conceptos básicos

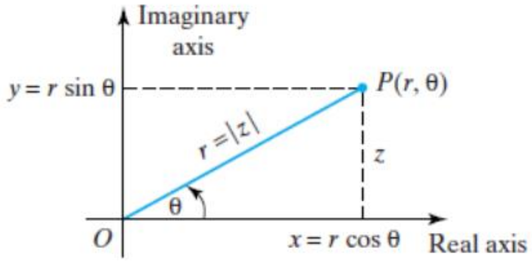
UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

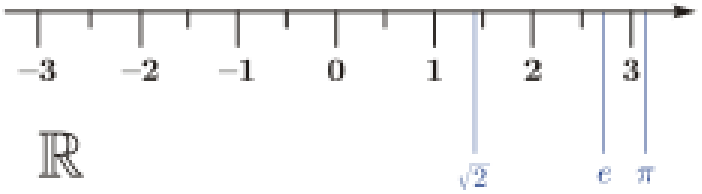
Representación grafica de conjuntos

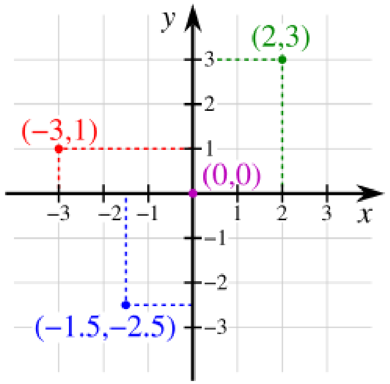
- La representación grafica permite visualizar los elementos, las relaciones entre conjuntos y operaciones como unión, intersección y diferencia.
- Dependiendo del tipo de conjunto, existen diferentes formas de representarlos gráficamente

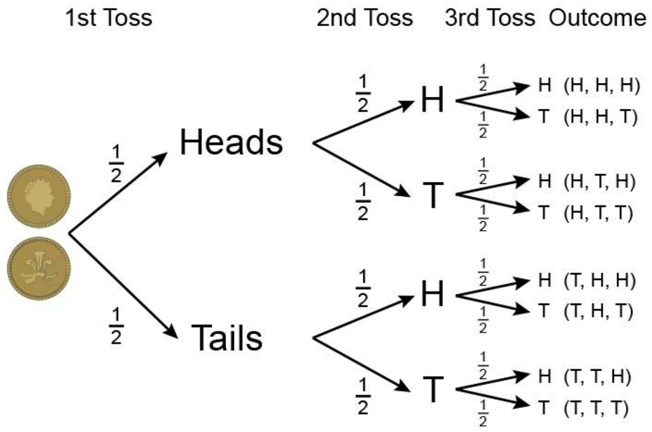
Tipo de conjunto	Representación
Conjuntos finitos	Diagrama de Venn, listado
Conjuntos numéricos reales	Recta numérica, intervalos
Pares ordenados / relaciones	Plano cartesiano
Complejos	Plano complejo (Argand)
Conjuntos con pasos/ramas	Árbol de decisiones









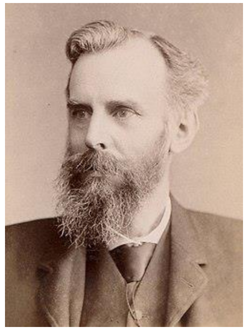


Conceptos básicos

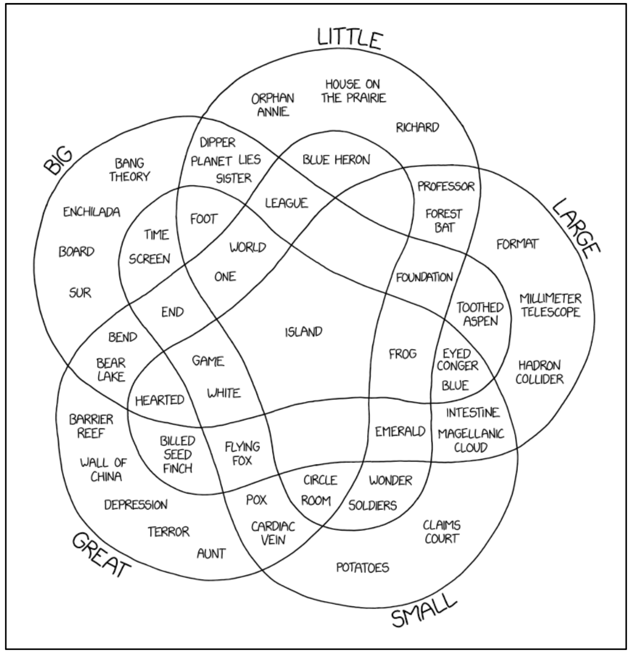
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Diagramas de Venn

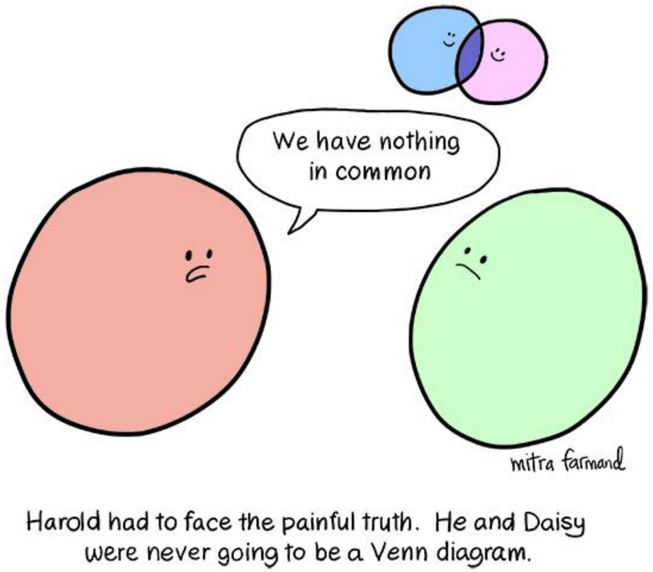
La forma más común y visual de representar gráficamente los conjuntos y las relaciones entre ellos es mediante los diagramas de **Venn-Euler**, comúnmente conocidos como **diagramas de Venn**.



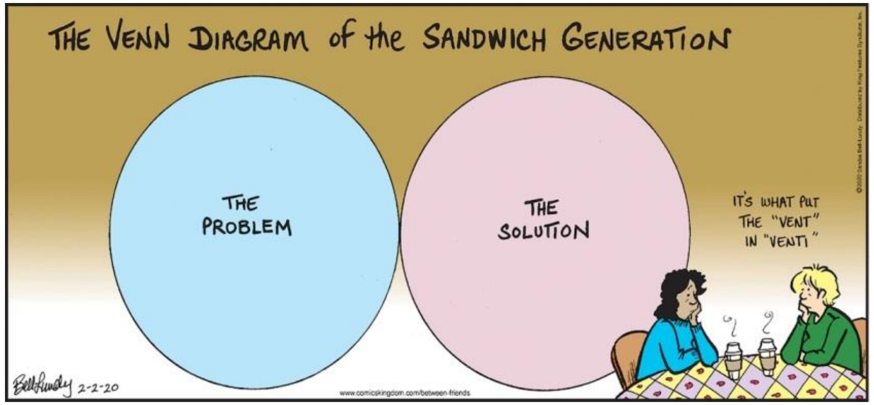
John Venn (link)



Size Venn Diagram (link)



Venn diagram let-down (link)



nebusresearch (link)

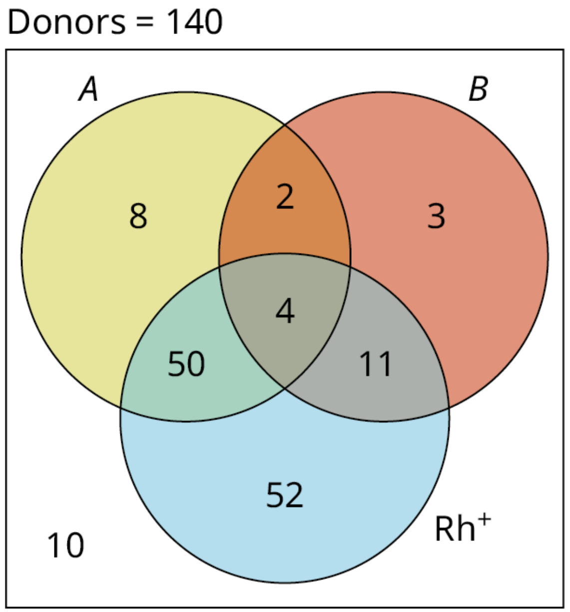
Conceptos básicos

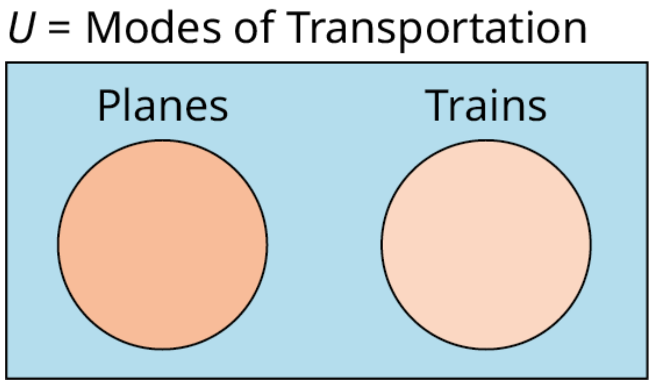
UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

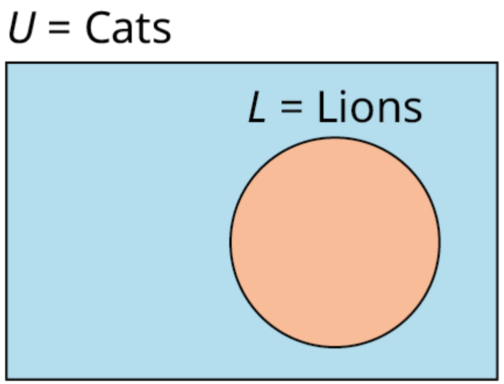
Diagramas de Venn

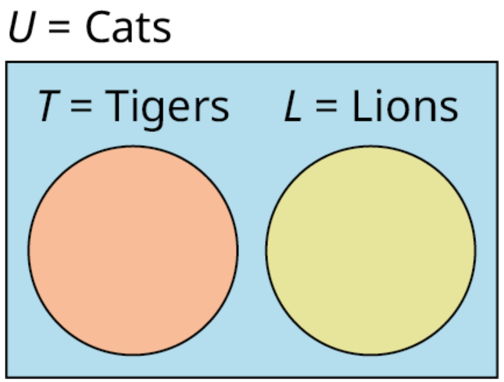
Los diagramas de Venn se caracterizan por que:

1. Permiten ilustrar la relación entre conjuntos.
2. Cada conjunto es representado a través de un círculo.
3. Si se tienen dos o más conjuntos, en las intersecciones de los círculos se ubican aquellos elementos que hacen parte de más de un conjunto a la vez.
4. Facilitan el entendimiento de la teoría de conjuntos.









Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- Conceptos básicos
- **Relaciones entre conjuntos**
- Tipos de conjuntos
- Operaciones con conjuntos
- Identidades
- Ejemplos
- Programación

Relaciones entre conjuntos

Relaciones entre conjuntos

La relación entre conjuntos se da cuando se comparan las características asociadas a dos o más conjuntos, y se establece una correspondencia entre ellos:

- Igualdad entre conjuntos.
- Subconjuntos.
- Subconjunto propio.
- Conjuntos disyuntos.

Relaciones entre conjuntos

Igualdad entre conjuntos

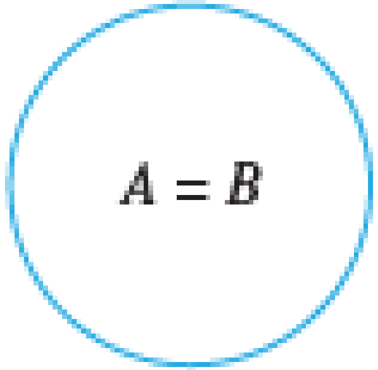
Dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos, sin importar el orden ni la repetición.

- **Notación**:

$$A = B$$

- **Definición formal**:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \, (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$



Ejemplo:

1. Si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{3,2,1\}$, como los elementos, independiente del orden, de ambos conjuntos son los mismos $A = B$
2. Sea $C = \{3,5,1\}$ y $D = \{1,5,5,5,3,3,1\} = \{1,5,3\}$ y por lo tanto es valido afirmar que $C = D$.

Relaciones entre conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Igualdad entre conjuntos

Conclusiones importantes:

- Dos conjuntos **son diferentes** cuando no tienen exactamente los mismos elementos; o en otras palabras, cuando hay al menos un elemento que está en uno y no está en el otro. Esto es:

$$A \neq B \Leftrightarrow \exists x\ (x \in A \leftrightarrow x \notin B)$$

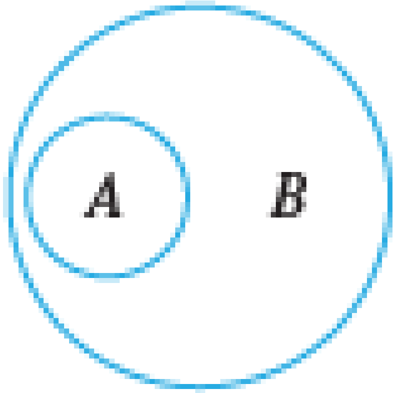
Relaciones entre conjuntos

Subconjuntos

Un subconjunto es un conjunto cuyos elementos están contenidos completamente dentro de otro conjunto. En otras palabras, si todos los elementos de un conjunto A también están en un conjunto B, entonces se dice que A es un subconjunto de B.

- **Notación**:

$$A \subseteq B$$



- **Definición formal**:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$$

Ejemplo:

1. Si $A = \{1,2\}$ y $B = \{1,2,3\}$, como se cumple que $\forall x\ (x \in A \rightarrow x \in B)$, podemos decir que $A \subseteq B$
2. Sea el conjunto F los fines de semana y S los días de la semana, tenemos que $F = \{sabado, domingo\}$ y $S = \{lunes, martes, miercoles, jueves, viernes, sabado, domingo\}$, de modo que podemos decir $F \subseteq S$

Relaciones entre conjuntos

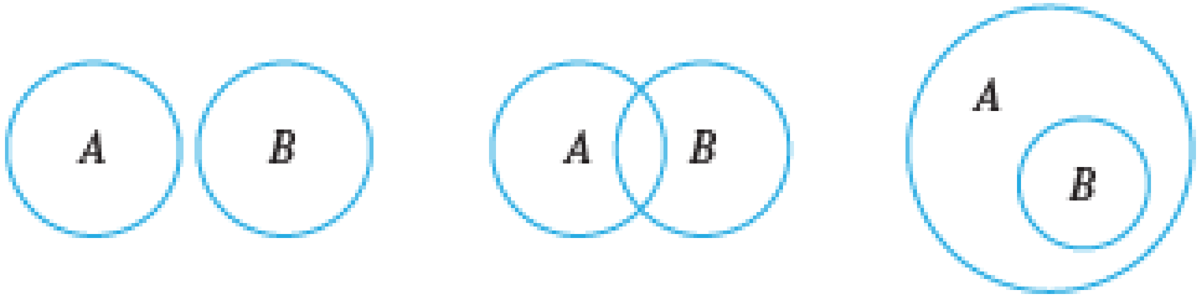
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Subconjuntos

Conclusiones importantes:

- Un conjunto A no es subconjunto B, sí y solo sí, hay al menos un elemento se encuentra en A, pero no esta en B.

$$A \nsubseteq B \Leftrightarrow \exists x \,(x \in A \wedge x \notin B)$$



- Decir que A es subconjunto de B es lo mismo que decir que B es superconjunto de A, pues decir que todos los elementos de A están en B, es lo mismo que decir que B contiene a todos los elementos de A :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow B \supseteq A$$

Relaciones entre conjuntos

Subconjunto propio

El conjunto A es subconjunto propio del conjunto B si:

1. A es subconjunto de B; es decir: $A \subseteq B$
2. A es diferente de B; o sea: $A \neq B$

En otras palabras, A es subconjunto propio de B, si B tiene al menos un elemento que no está en A. Esto formalmente se expresa:

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x\,(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B)$$

Si se niega la expresión anterior llegamos que un subconjunto no es subconjunto propio de otro cuando:

$$A \not\subset B \Leftrightarrow \exists x\,(x \in A \wedge x \notin B) \vee \forall x\,(x \in B \rightarrow x \in A)$$

Ejemplo:

1. Si $A = \{1,2\}$ y $B = \{1,2,3\}$ como $A \subseteq B$ y el numero de elementos de A es menor que el de B (o B tiene elementos que A no tiene), podemos decir que $A \subset B$.

Relaciones entre conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relaciones importantes en términos de subconjuntos

En la siguiente tabla se muestra que es posible expresar las relaciones anteriores en términos de subconjuntos:

Relación	**Expresión en términos de subconjuntos**
Igualdad	$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$
Diferencia	$A \neq B \Leftrightarrow (A \nsubseteq B) \vee (B \nsubseteq A)$
Subconjunto propio	$A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$

Relaciones entre conjuntos

Relaciones importantes en términos de subconjuntos

Ejemplo: Aplicando los conceptos de lógica cuantificacional y las definiciones de conjuntos previamente vistas demuestre la equivalencia para la igualdad de la tabla anterior: $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$

	Pasos	Razón
1	$A = B$	Premisa
2	$\forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$	Definición de igualdad entre conjuntos.
3	$\forall x\big((x \in A \to x \in B) \wedge (x \in B \to x \in A)\big)$	Definición de equivalencia en 2
4	$\forall x(x \in A \to x \in B) \wedge \forall x(x \in B \to x \in A)$	Distributividad del cuantificador en 3
5	$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$	Definición de subconjunto en 4

Relaciones entre conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Relaciones importantes en términos de subconjuntos

Ejemplo: Aplicando los conceptos de lógica cuantificacional y las definiciones de conjuntos previamente vistas demuestre la equivalencia para la diferencia de la tabla anterior: $A \neq B \Leftrightarrow (A \nsubseteq B) \vee (B \nsubseteq A)$

	Pasos	Razón
1	$A \neq B$	Premisa
2	$\neg(A = B)$	Premisa 1 en términos de la igualdad
3	$\neg\Big(\forall x\big((x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)\big)\Big)$	Definición de igualdad en 2
4	$\neg\big((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)\big)$	Definición de subconjunto en 3
5	$\neg(A \subseteq B) \vee \neg(B \subseteq A)$	Ley de Morgan en 4
6	$(A \nsubseteq B) \vee (B \nsubseteq A)$	Negación en 5

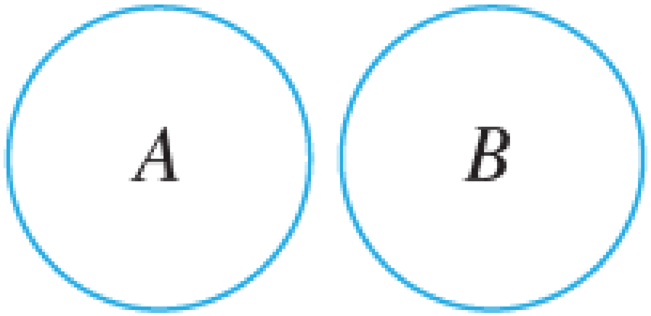
Relaciones entre conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conjuntos disyuntos

Dos conjuntos A y B son disyuntos si no tienen ningún elemento en común. En otras palabras, no existe un elemento que pertenezca a A y a B al mismo tiempo. Es decir:

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \forall x \, (x \in A \rightarrow x \notin B)$$



Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- **Tipos de conjuntos**
- Operaciones con conjuntos
- Identidades
- Ejemplos
- Programación

Tipos de conjuntos

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Clasificación

- Existen diferentes criterios de clasificación de conjuntos.
- En nuestro caso, los solo vamos a profundiza un poco en algunos tipos de conjuntos los cuales se listan a continuación:
    - Conjunto vacío.
    - Conjunto finito.
    - Conjunto infinito.
    - Conjunto unitario.
    - Conjunto universal.
    - Conjunto homogéneo.
    - Conjunto heterogéneo.

Tipos de conjuntos

Conjunto vacío

El conjunto vacío o nulo, es un conjunto especial que se caracteriza por que no posee ningún elemento.

- **Notación**:

$$\emptyset = \{\quad\}$$

- **Definición formal**:

$$\emptyset = \{x | x \in A \ \wedge x \notin A\}$$

- **Ejemplos:**
  - Los números naturales menores que cero: $\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{N} | x < 0\} = \{\quad\} = \emptyset$
  - Los meses del año con 32 días: $E = \{x \in \text{Meses} | x \text{ tiene 32 dias}\} = \{\quad\} = \emptyset$
  - Los colores del arco iris que no son colores: $F = \{\quad\} = \emptyset$

Tipos de conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conjuntos finito e infinito

Conjunto finito

Un conjunto es finito si tiene un número limitado de elementos. Es decir, se puede determinar la cantidad total de sus elementos y, teóricamente, se podrían listar todos.

- **Ejemplo:**
  - Los estudiantes del curso de discretas 1: $C = \{e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_{n-1}, e_n\}$
  - Los días de la semana: $S = \{L, M, W, J, V, S, D\}$
  - Los primeros 10 números naturales: $D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

Conjunto infinito

Es aquel que tiene un número ilimitado de elementos. Por lo tanto, no es posible contar todos sus elementos.

- **Ejemplo:**
  - El conjunto de números naturales: $\mathbb{N} = \{0,1,2,3, \dots\}$
  - Las estrellas del universo: $E = \{Sol, Cirio, Arturo, Vega, Canopus, Alfa\ Centauri, \dots\}$
  - El conjunto de puntos de una recta.

Tipos de conjuntos

Conjunto unitario

Un conjunto unitario es aquel que contiene exactamente un solo elemento. Es un tipo de conjunto no vacío y finito.

- **Notación**:

$$A = \{a\}$$

- **Ejemplo:**
  - El conjunto que solo contiene el 7: $A = \{7\}$
  - El conjunto que contiene el ultimo día de la semana: $W = \{domingo\}$
  - El conjunto que contiene como único elemento al conjunto vacío: $E = \{\emptyset\}$
  - El perro de Superman: $P = \{Kripto\}$

Tipos de conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conjunto universal

El conjunto universal, denotado comúnmente por U, es el conjunto que contiene todos los elementos posibles dentro de un **contexto** o **universo de discurso específico**.

- Depende del problema o del conjunto de referencia.
- Todos los demás conjuntos en el problema se consideran subconjuntos de U.

- **Ejemplos**: La siguiente tabla ilustra algunos ejemplos del conjunto universal dependiendo del contexto:

Contexto	**Conjunto universal U**
Letras del abecedario	$U = \{a, b, c, \dots, z\}$
Números naturales menores que 10	$U = \{0,1,2, \dots, 9\}$
Estudiantes de Matemáticas discretas 1	$U = \{e_1, e_2, \dots, e_i, \dots, e_{n-1}, e_n\}$
Palos de una baraja de póker	$U = \{♠, ♥, ♦, ♣\}$
Valores de las cartas de una baraja de póker	$U = \{A, 2,3,4,5,6,7,8,9,10, J, Q, K\}$

Tipos de conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conjunto homogéneo y heterogéneo

Conjunto homogéneo

En este conjunto, todos los elementos son de la misma naturaleza o tipo.

- **Ejemplo:**
  - Los días de la semana: $S = \{L, M, W, J, V, S, D\}$
  - Algunas frutas: $F = \{pera, manzana, uva\}$
  - Edades de los estudiantes de discretas 1: $E = \{17,19,20, \ldots, 21\}$

Conjunto heterogéneo

Este tipo de conjunto contiene elementos de diferente tipo o categoría.

- **Ejemplo:**
  - Elementos de la mochila de un estudiante: $M = \{cuaderno, lapiz, lapicero, calculadora, \ldots\}$
  - Personajes de la Odisea: $O = \{Ulises, Atenea, Polifemo, Escila, Cirse, Penelope\}$

Tipos de conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Cardinalidad de un conjunto

La cardinalidad es una medida del tamaño de un conjunto que es equivalente a la cantidad de elementos que este tiene.

- **Notación:** Sea A un conjunto, la cardinalidad de A se representa como se muestra a continuación:

$$|A| = card(A) = n(A)$$

- **Ejemplo**: Determine la cardinalidad de cada uno de los siguientes conjuntos.

  - Sea A el conjunto de los enteros positivos impares menores a 10.

$$A = \{1,3,5,7,9\} \rightarrow |A| = n(A) = 5$$

  - Sea S el conjunto de letras del alfabeto español.

$$S = \{a, b, \dots, \tilde{n}, \dots, z\} \rightarrow |S| = n(S) = 27$$

  - Conjunto nulo $\emptyset$

$$\emptyset = \{\quad\} \rightarrow |\emptyset| = n(\emptyset) = 0$$

  - Sea $B = \{\emptyset\}$

$$B = \{\emptyset\} \rightarrow |B| = n(B) = 1$$

  - El conjunto de números enteros

$$C = \{\dots, -1,0,1, \dots\} \rightarrow |C| = \mathrm{n}(C) = \aleph_0 \ (|C| \text{es } \infty)$$

Tipos de conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Conjunto potencia

El conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ de un conjunto A, es el conjunto formado por todos los subconjuntos posibles de A, incluyendo el conjunto vacío ($\emptyset$) y el conjunto mismo conjunto (A). El numero de elementos de este conjunto (cardinalidad) esta dado por:

$$|\mathcal{P}(A)| = n(\mathcal{P}(A)) = 2^{|A|} = 2^{n(A)}$$

- **Ejemplos**:

1. Dado el conjunto $A = \{1,2,3\}$, determine el conjunto $\mathcal{P}(A)$ y su cantidad de elementos:
   - Inicialmente vamos a determinar la cardinalidad de $\mathcal{P}(A)$.

   $$|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|} = 2^3 = 8$$

   - Finalmente, el $\mathcal{P}(A)$ esta formado por:

   $$|\mathcal{P}(A)| = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$$

2. Dado el conjunto $\emptyset$, determine el conjunto $\mathcal{P}(\emptyset)$ y su cantidad de elementos:
   - Inicialmente vamos a determinar la cardinalidad de $\mathcal{P}(\emptyset)$.

   $$|\mathcal{P}(\emptyset)| = 2^{|\emptyset|} = 2^1 = 2$$

   - Finalmente, el $\mathcal{P}(A)$ esta formado por:

   $$|\mathcal{P}(\emptyset)| = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- Tipos de conjuntos
- **Operaciones con conjuntos**
- Identidades
- Ejemplos
- Programación

Operaciones entre conjuntos

Sobre las operaciones entre conjuntos

Las operaciones entre conjuntos permiten combinar o modificar conjuntos para crear nuevos conjuntos. Las principales son:

- Unión
- Intersección.
- Diferencia de conjuntos.
- Complemento de un conjunto.
- Diferencia simétrica.

Operaciones entre conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo

Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo ‘calculo’ y B el conjunto asociado de letras que aparecen en ‘matemáticas discretas’. Determine:

1. La representación por comprensión y extensión de cada conjunto.
2. El conjunto universal.
3. Dibuje el diagrama de ven que represente el problema.
4. Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos.
5. Las letras que aparecen en ambos conjuntos.
6. Las que solo aparecen en el conjunto A pero que no están en el conjunto B.
7. Las que solo aparecen en el conjunto B pero que no están en el conjunto A.
8. Las letras que no se encuentran en A.
9. Las letras que no se encuentran en B.
10. Las letras que están solo en A o en B.

Operaciones entre conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplo – Solución

Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo ‘calculo’ y B el conjunto asociado de letras que aparecen en ‘matemáticas discretas’. Determine:

1. La representación por comprensión y extensión de cada conjunto:

Contexto	Representación por extensión	Representación por comprensión
Letras de la palabra ‘calculo’	$A = \{c, a, l, u, o\}$	$A = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra } '\text{calculo}'\}$
Letras de la palabra ‘matemáticas discretas’	$B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$	$B = \{x \mid x \text{ es una letra de la palabra } '\text{matematicas discretas}'\}$

2. El conjunto universal: Para el contexto de este problema podemos definir el conjunto universal como las palabras del alfabeto. Es decir:

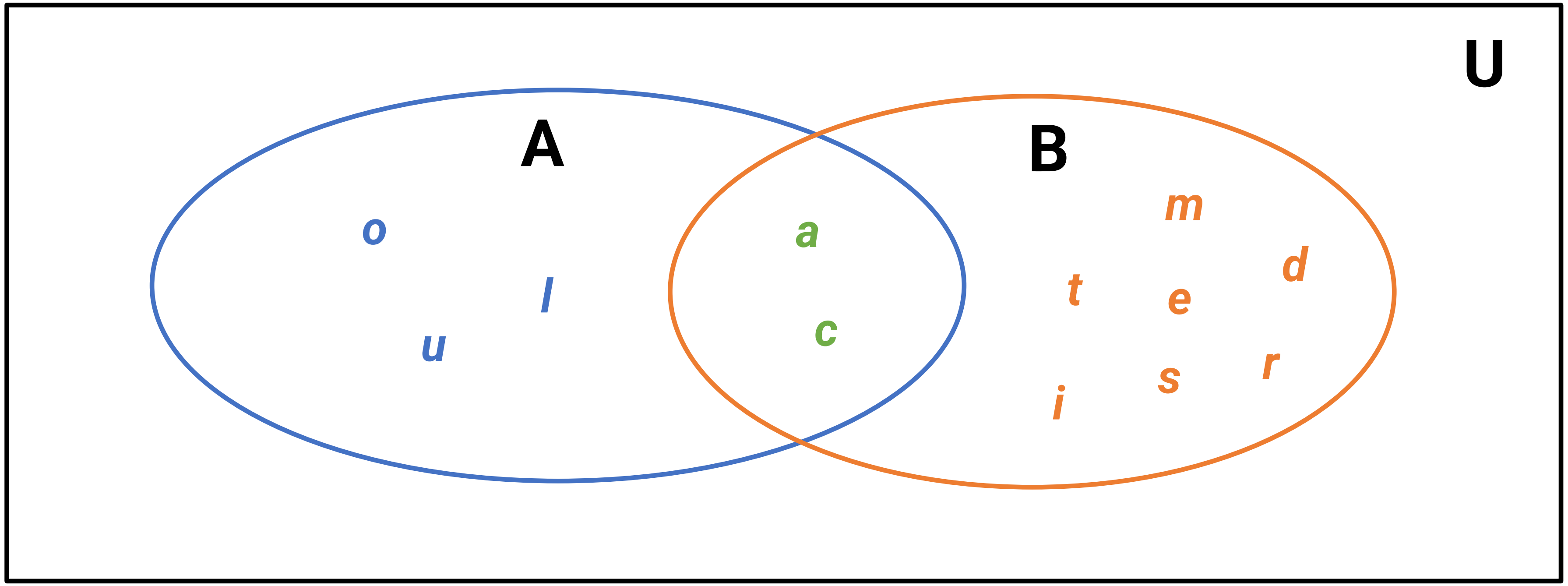
$$U = \{a, b, c, \dots, m, n, ñ, o, p, \dots, x, y, z\} = \{x \mid x \text{ es una letra del alfabeto español}\}$$

Operaciones entre conjuntos

Ejemplo – Solución

Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo 'calculo' y B el conjunto asociado de letras que aparecen en 'matemáticas discretas'. Determine:

3. Diagrama de Venn



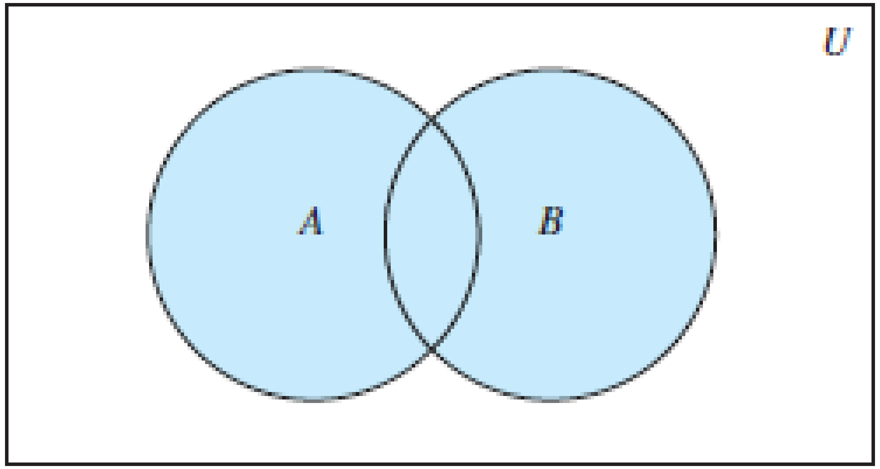
Operaciones entre conjuntos

Unión ($A \cup B$)

La unión de A y B es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A, a B, o a ambos.

- **Definición formal**:

$$A \cup B = \{x | x \in A \ \vee x \in B\}$$



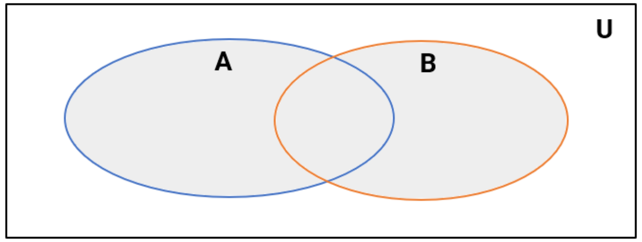
$A \cup B$ is shaded.

Ejemplo: Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo 'calculo' y B el conjunto asociado de letras que aparecen en 'matemáticas discretas'. Determine:

4. Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos.

Solución:

- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$
- $A \cup B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r, l, u, o\}$



$A \cup B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r, l, u, o\}$

Operaciones entre conjuntos

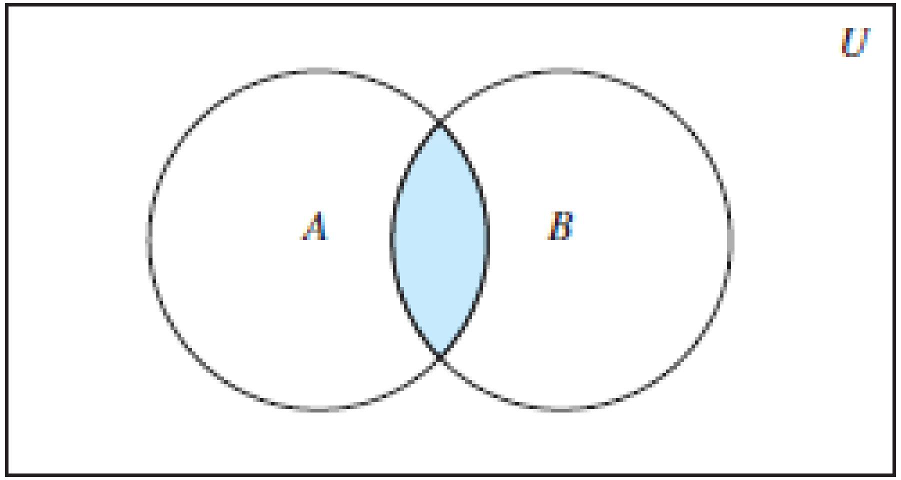
UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Intersección $(A \cap B)$

La unión de A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a ambos conjuntos simultáneamente.

- **Definición formal**:

$$A \cap B = \{x | x \in A \ \wedge x \in B\}$$



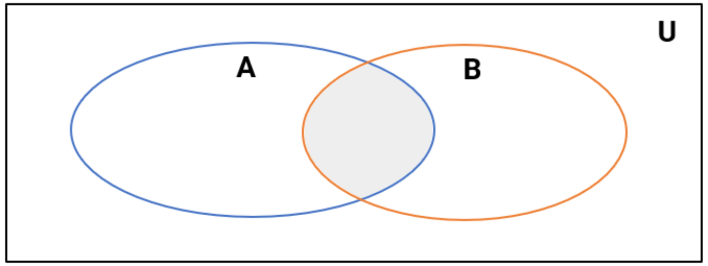
$A \cap B$ is shaded.

Ejemplos: Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo ‘calculo’ y B el conjunto asociado de letras que aparecen en ‘matemáticas discretas’. Determine:

5. Las letras que aparecen en ambos conjuntos.

Solución:

- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$
- $A \cap B = \{a, c\}$



$\boxed{A \cup B = \{a, c\}}$

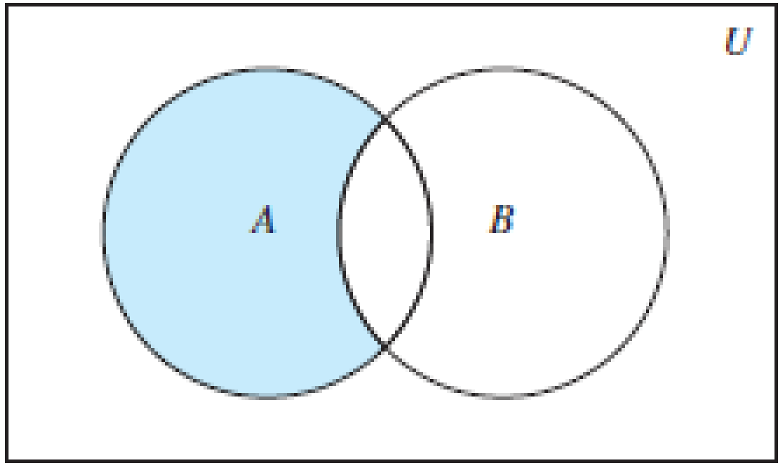
Operaciones entre conjuntos

Diferencia ($A - B$ ó $A \setminus B$)

La diferencia (o complemento relativo) de A y B es el conjunto de elementos que están en A pero no en B.

- **Definición formal**:

$$A - B = \{x | x \in A \ \wedge x \notin B\}$$



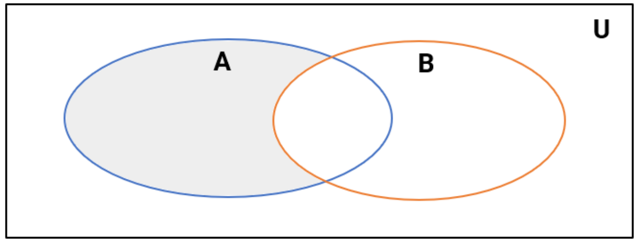
$A - B$ is shaded.

Ejemplos: Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo 'calculo' y B el conjunto asociado de letras que aparecen en 'matemáticas discretas'. Determine:

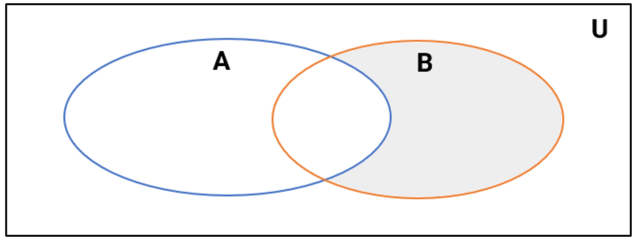
6. Las que solo aparecen en el conjunto A pero que no están en el conjunto B.
7. Las que solo aparecen en el conjunto B pero que no están en el conjunto A.

Solución:

- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$
- $A - B = \{l, u, o\}$
- $B - A = \{m, t, e, i, s, d, r\}$



$A - B = \{l, u, o\}$



$A - B = \{m, t, e, i, s, d, r\}$

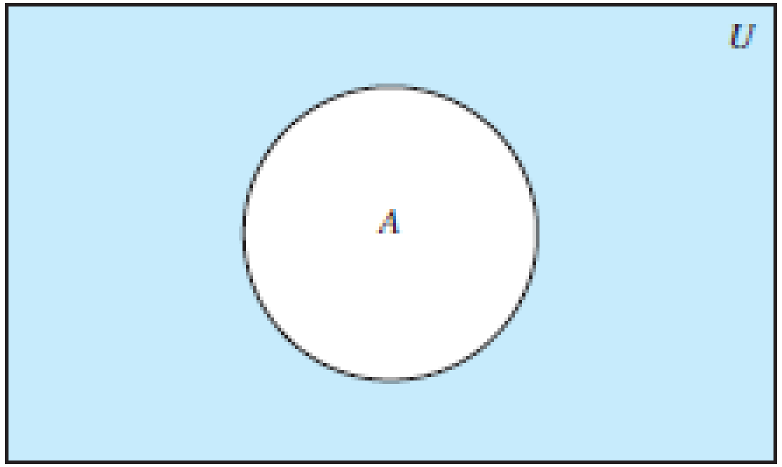
Operaciones entre conjuntos

Complemento (A^c ó A' ó $\overline{A}$)

El complemento de A (A') es el conjunto de elementos del universo U que no pertenecen a A.

- **Definición formal**:

$$A' = U - A = (A - B) \cup (B - A) = \{x \in U | (x \notin A)\}$$



$\overline{A}$ is shaded.

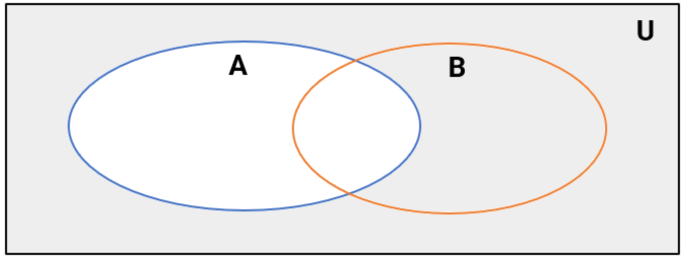
Ejemplos: Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo 'calculo' y B el conjunto asociado de letras que aparecen en 'matemáticas discretas'. Determine:

8. Las letras que no se encuentran en A.
9. Las letras que no se encuentran en B.

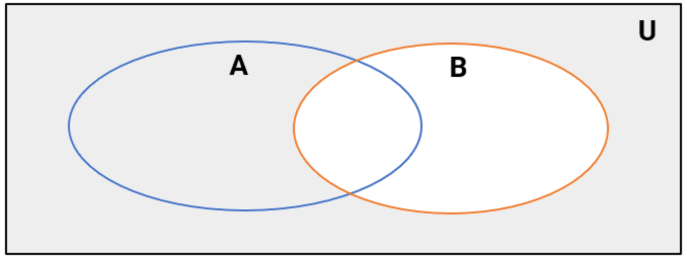
Solución:

- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$
- $A' = \{a, b, \dots, z\} - \{c, a, l, u, o\}$
- $B' = \{a, b, \dots, z\} - \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$

$\boxed{A' = \{b, d, \dots, k, m, n, \dots, z\}}$



$\boxed{B' = \{b, f, g, \dots, k, l, n, \dots, z\}}$



Operaciones entre conjuntos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Diferencia simétrica ($A \oplus B$ ó $A \triangle B$)

La diferencia simétrica de A y B es el conjunto de elementos que están en A o en B, pero no en ambos.

- **Definición formal**:

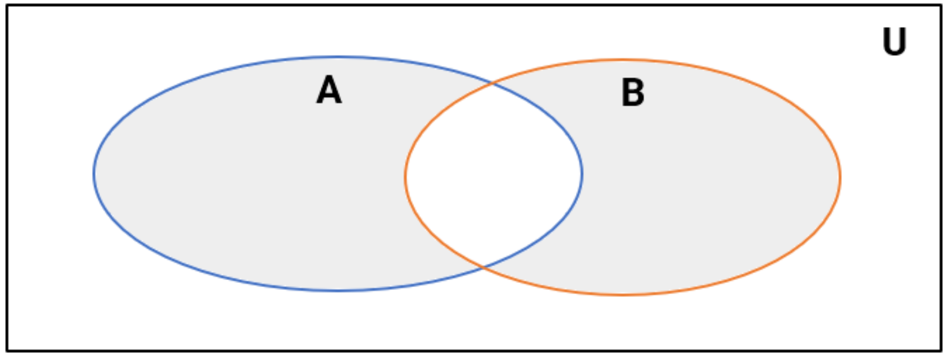
$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{x | (x \in A \ \wedge x \notin B) \vee (x \in B \ \wedge x \notin A)\}$$

Ejemplos: Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo ‘calculo’ y B el conjunto asociado de letras que aparecen en ‘matemáticas discretas’. Determine:

10. Las letras que están solo en A o solo en B

Solución:

- $A = \{c, a, l, u, o\}$
- $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$
- $A \oplus B = \{l, u, o, m, t, e, i, s, d\}$



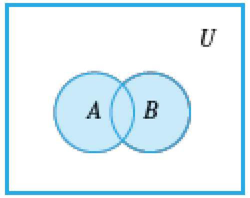
$\boxed{A \oplus B = \{l, u, o, m, t, e, i, s, d\}}$

Operaciones entre conjuntos

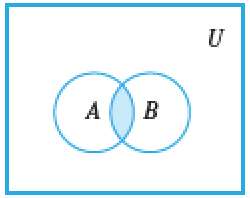
UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Resumen

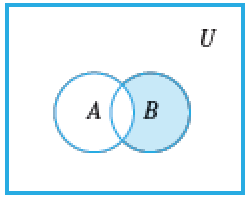
Operación		Definición	Ejemplo
Unión	$A \cup B = A + B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$	Conjunto de elementos que están en A o en B (o en ambos)	$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ $A \cup B = \{1,2,3\}$
Intersección	$A \cap B = A \cdot B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$	Conjunto de elementos que están tanto en A como en B	$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ $A \cap B = \{2\}$
Diferencia	$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$	Conjunto de elementos que están en A pero no en B	$A = \{1,2,3\}$ $B = \{2\}$ $A - B = \{1,3\}$ $B - A = \{\ \} = \emptyset$
Diferencia simétrica	$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$	Conjunto de elementos que están en A o en B, pero no en ambos	$A = \{1,2\}$ $B = \{2,3\}$ $A \oplus B = \{1,3\}$
Complemento	$A' = A^C = U - A$	Conjunto de elementos que están en el universo pero no en A	$U = \{1,2,3\}$ $A = \{1,2\}$ $A' = A^C = \{3\}$



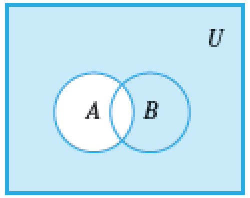
La región sombreada representa $A \cup B$.



La región sombreada representa $A \cap B$.



La región sombreada representa $B - A$.



La región sombreada representa A^c.

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- Tipos de conjuntos
- Operaciones con conjuntos
- **Identidades**
- Ejemplos
- Programación

Identidades

Tabla de las principales identidades básicas de conjuntos

Nombre	Equivalencia	
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Conmutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$
Doble negación	$A'' = A$	
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$

Identidades

Identidades básicas de cardinalidad

Nombre	Equivalencia
1	$\|\emptyset\| = 0$
2	$A \cdot B = 0 \rightarrow \|A + B\| = \|A\| + \|B\|$
3	$\|A + B\| = \|A\| + \|B\| - \|A \cdot B\|$
4	$\|A - B\| = \|A\| - \|A \cdot B\|$
5	$\|A \cdot B\| \leq \|A\|$
6	$\|A\| \leq \|A + B\|$
7	$\|A'\| = \|U\| - \|A\|$
8	$a \leq \|A\| \leq b \leftrightarrow \|U\| - a \leq \|A'\| \leq \|U\| - b$
9	$Max(\|A\|, \|B\|) \leq \|A + B\| \leq Min(\|A\| + \|B\|, \|U\|)$
10	$Max(0, \|A\| + \|B\| - \|U\|) \leq \|A \cdot B\| \leq Min(\|A\| + \|B\|)$

Identidades

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Demostración de identidades de conjuntos

Existen diferentes maneras de demostrar identidades de conjuntos:

1. **Demostración por doble inclusión**: Consiste en demostrar que cada conjunto (lado de la identidad) es un subconjunto del otro.
2. **Método de reescritura algebraica**: Usa la notación de construcción de conjuntos y la lógica proposicional.
3. **Tablas de pertenencia**: En este método, análogo a las tablas de verdad, se verifica que los elementos de la misma combinación de conjuntos siempre pertenezcan o no al mismo lado de la identidad. Para esto, se usa 1 para indicar pertenencia al conjunto y 0 para indicar no pertenencia.

Identidades

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Demostración por doble inclusión

Consiste en demostrar que cada conjunto (lado de la identidad) es un subconjunto del otro. Por ejemplo, para demostrar que $A = B$, este procedimiento consiste en dos pasos:

1. **Probar que $\boldsymbol{A \subseteq B}$**: Se toma un elemento arbitrario $x \in A$ y, utilizando las definiciones y propiedades de las operaciones de conjuntos, se demuestra que necesariamente $x \in B$.
2. **Probar que $\boldsymbol{B \subseteq A}$**: Se repite el mismo razonamiento en sentido contrario comando un $x \in B$ para demostrar que $x \in A$

Operación	Definición
Unión	$A \cup B = A + B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
Intersección	$A \cap B = A \cdot B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
Diferencia	$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
Diferencia simétrica	$A \oplus B = \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\}$
Complemento	$A' = A^C = \bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$

Identidades

Demostración por doble inclusión

Ejemplo: Demuestre la ley de Morgan: $(A \cdot B)' = A' + B'$

Demostración por doble inclusión:

Paso 1: $(A \cdot B)' \subseteq A' + B'$

	Pasos	Razón
1	$x \in (A + B)'$	Lado izquierdo
2	$x \notin (A + B)$	Definición de complemento en 1
3	$\neg\big(x \in (A \cdot B)\big)$	Definición de negación en 2
4	$\neg\big((x \in A) \wedge (x \in B)\big)$	Definición de intersección en 3
5	$\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$	Ley de Morgan en 4
6	$(x \notin A) \vee (x \notin B)$	Definición de negación
7	$x \in A' + B'$	Definición de unión

Paso 2: $A' + B' \subseteq (A \cdot B)'$

	Pasos	Razón
1	$x \in (A' + B')$	Lado derecho
2	$x \in A' \vee x \in B'$	Definición de unión en 1
3	$x \notin A \vee x \notin B$	Definición de complemento 2
4	$\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)$	Definición de negación en 3
5	$\neg\big((x \in A) \wedge (x \in B)\big)$	Definición de intersección en 4
6	$\neg\big(x \in (A \cdot B)\big)$	Ley de Morgan en 5
7	$x \notin (A \cdot B)$	Definición de negación 6
8	$x \in (A \cdot B)'$	Definición de complemento 7

Identidades

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Método de escritura algebraica

Este método implica transformar un lado de la identidad en el otro utilizando leyes de conjuntos ya establecidas (como las leyes conmutativas, asociativas, distributivas, de De Morgan, de identidad, de complemento, etc.). Es similar a las manipulaciones algebraicas en expresiones numéricas.

Nombre	Equivalencia	
Idempotencia	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
Identidad	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
Dominación	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
Conmutativa	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
Asociativa	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
Distributiva	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Complemento	$A \cdot A' = 0$	$A + A' = 1$
Doble negación	$A'' = A$	
Absorción	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
De Morgan	$(A \cdot B)' = A' + B'$	$(A + B)' = A' \cdot B'$

Identidades

Demostración por doble inclusión

Ejemplo: Aplicando las leyes fundamentales para el álgebra de conjuntos, demuestre que:

$$\left(A + (B \cdot C)\right)' = (C' + B') \cdot A'$$

	Pasos	Razón
1	$\left(A + (B \cdot C)\right)'$	Premisa
2	$A' \cdot (B \cdot C)'$	Ley de Morgan en 1
3	$A' \cdot (B' + C')$	Ley de Morgan en 2
4	$(B' + C') \cdot A'$	Ley conmutativa en 3
5	$(C' + B') \cdot A'$	Ley conmutativa en 4

Identidades

Demostración por doble inclusión

Ejemplo: Aplicando las leyes fundamentales para el álgebra de conjuntos, simplifique:

$$ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'BC + A'BC' + A'B'C + A'B'C'$$

	Pasos	Razón
1	$ABC + ABC' + AB'C + AB'C' + A'BC + A'BC' + A'B'C + A'B'C'$	Premisa
2	$(ABC + ABC') + (AB'C + AB'C') + (A'BC + A'BC') + (A'B'C + A'B'C')$	Asociatividad en 1
3	$AB \cdot (C + C') + AB' \cdot (C + C') + A'B \cdot (C + C') + A'B' \cdot (C + C')$	Distributividad en 2
4	$AB \cdot (1) + AB' \cdot (1) + A'B \cdot (1) + A'B' \cdot (1)$	Complemento en 3
5	$AB + AB' + A'B + A'B'$	Identidad en 4
6	$(AB + AB') + (A'B + A'B')$	Asociatividad en 5
7	$A \cdot (B + B') + A' \cdot (B + B')$	Distributividad en 6
8	$A \cdot (1) + A' \cdot (1)$	Complemento en 7
9	$A + A'$	Identidad en 8
10	1	Identidad en 9

Identidades

Demostración por tablas de pertenencia (Similar a tablas de verdad)

- Este método es útil para identidades que involucran un número pequeño de conjuntos.
- Se crea una tabla donde cada fila representa una posible combinación de pertenencia de un elemento a los conjuntos involucrados.
- Para cada conjunto base (por ejemplo, A, B, C), un elemento x puede pertenecer (1) o no pertenecer (0) a él.
- El procedimiento consisten en evaluar la pertenencia a cada lado de la identidad de tal modo que si las columnas resultantes para ambos lados de la igualdad son idénticas, la identidad es verdadera.

Identidades

Demostración por tablas de pertenencia (Similar a tablas de verdad)

Ejemplo: Use la tabla de pertenencia para demostrar que:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

A	B	C	$B + C$	$A \cdot (B + C)$	$A \cdot B$	$A \cdot C$	$A \cdot B + A \cdot C$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Agenda

- Introducción
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- Tipos de conjuntos
- Operaciones con conjuntos
- Identidades
- **Ejemplos**
- Programación

Ejemplos

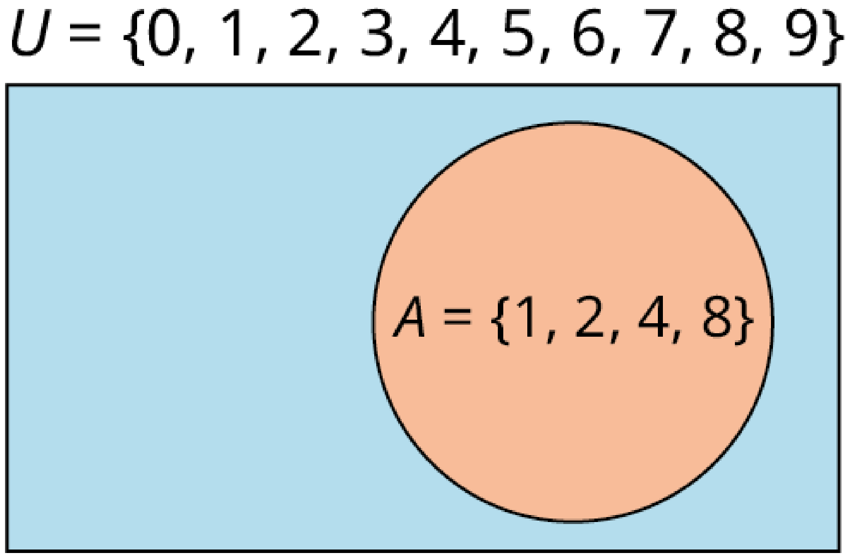
Ejemplos

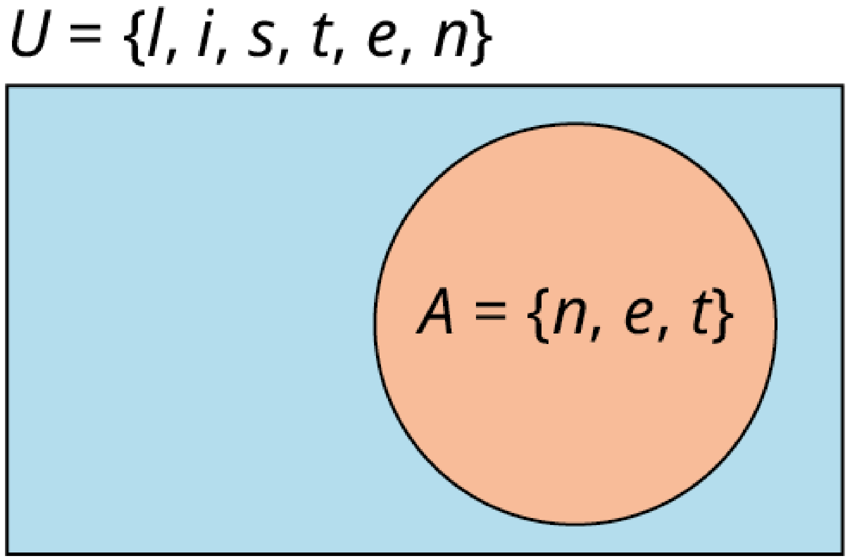
1. Represente cada uno de los siguientes conjuntos por el método que usted elija.
    - Conjunto de todos los cuadrados que también son círculos.
    - Conjunto de todos los equipos de futbol de la liga profesional colombiana.
2. Dados los siguientes conjuntos, determine la cardinalidad
    - $P = \{\text{Snuzzle}, \text{Butterscotch}, \text{Blue Belle}, \text{Minty}, \text{Blossom}, \text{Cotton Candy}\}$
    - $F = \left\{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right\}$
    - $C = \{n^3 | n \text{ es un miemtro de } \mathbb{N}\}$
3. Para los siguientes conjuntos, obtenga le numero total de subconjuntos que se puede formar:
    - $C = \{\text{Adele}, \text{Beyonce}, \text{Cher}, \text{Madonna}, \text{Shakira}\}$
    - $A = \{3\}$
4. Dibuje un diagrama de Venn que represente las siguientes relaciones:
    - Todas las bicicletas y todos los carros tienen ruedas, pero ninguna bicicleta es un carro.
    - Todas las mujeres son personas

Ejemplos

Ejemplos

5. Dibuje el diagrama de Venn donde se muestre claramente la relación entre los siguientes conjuntos.
   - $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
   - $A = \{2,3,5,7\}$
   - $A' = \{0,1,4,6,8,9\}$
6. Para los siguientes ejercicios, use el diagrama de Venn para determinar A, A' y U

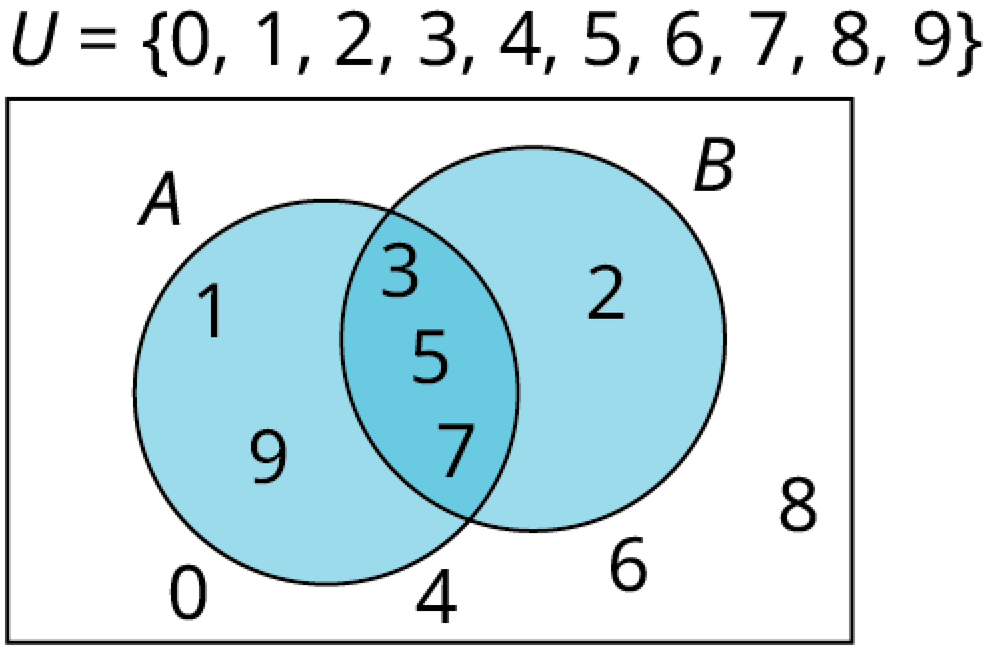




Ejemplos

Ejemplos

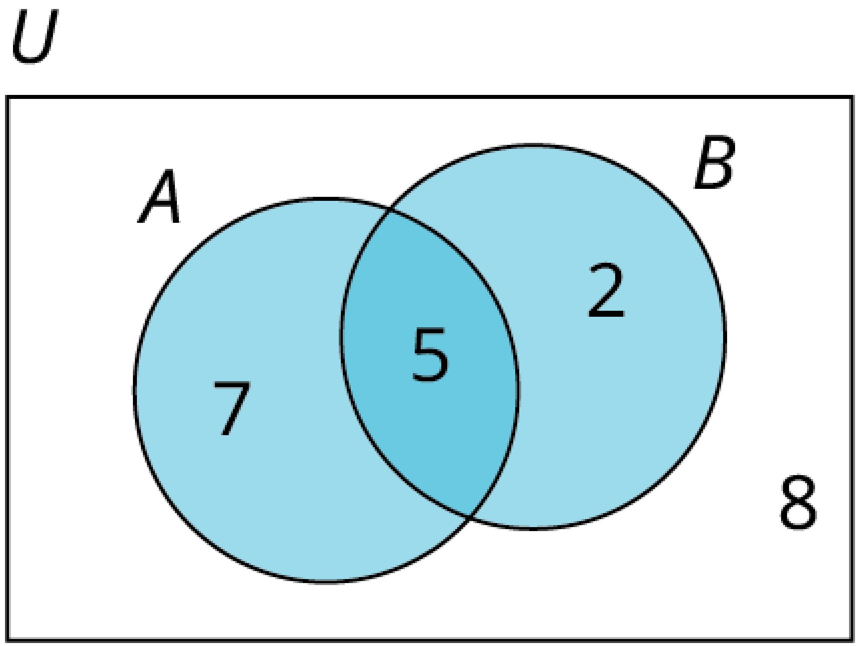
7. Teniendo en cuenta el siguiente diagrama de Venn encuentre:
    - $A \cap B$
    - $A \cup B$
    - $A \cup B'$
    - $n(A \cup B')$
    - $(A \cup B)'$
    - $(A \cap B)'$
    - $|(A' \cap B)'|$
    - $(A' \cup B')'$



Ejemplos

Ejemplos

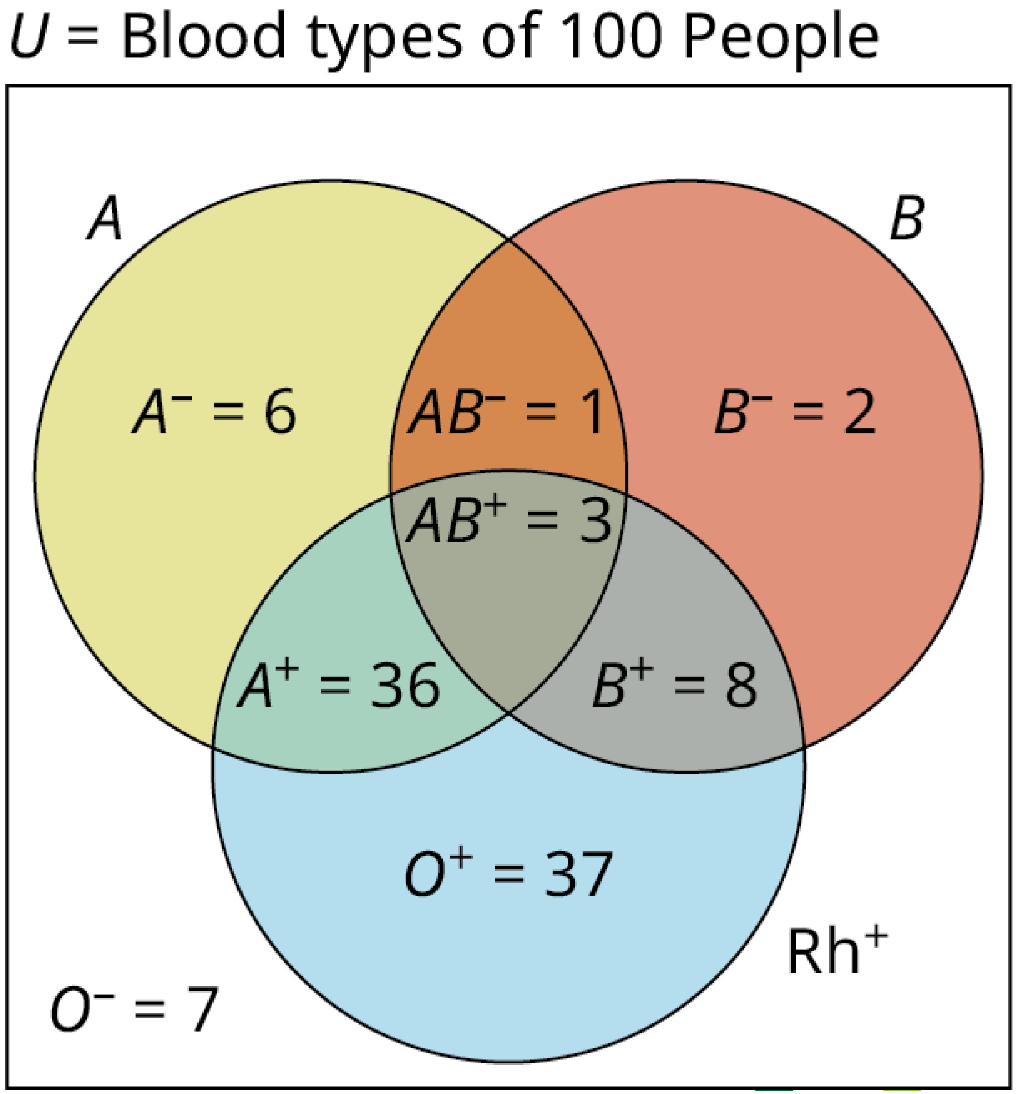
8. El siguiente diagrama de Venn esta dibujado de acuerdo a la cardinalidad de cada uno de los conjuntos. Teniendo en cuenta esta información, y sustentando mediante la aplicación de las identidades básicas de cardinalidad determine a partir de este:
   - $|A|$
   - $|B|$
   - $|A \cdot B|$
   - $|A + B|$
   - $|U|$
   - $|(A + B)'|$
   - $|A'|$
   - $|A \cdot '|$



Ejemplos

Ejemplos

9. Utilice el diagrama de Venn a continuación, que muestra los tipos de sangre de 100 personas que donaron sangre en una clínica local, para responder las siguientes preguntas:
   - ¿Cuántas personas con factor sanguíneo A donaron sangre?
   - Julio tiene el tipo sanguíneo B+. Si necesita una cirugía que requiera una transfusión de sangre, puede aceptar sangre de cualquier persona que no tenga el factor sanguíneo A. ¿Cuántas personas donaron sangre que Julio puede aceptar?
   - ¿Cuántas personas que donaron sangre no tienen el factor sanguíneo Rh+?
   - ¿Cuántas personas tenían sangre tipo A y tipo B?



Ejemplos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplos

10. Dados los siguientes conjuntos:
    - $U = \{\text{red}, \text{orange}, \text{yellow}, \text{green}, \text{blue}, \text{indigo}, \text{violet}\}$
    - $A = \{\text{red}, \text{yellow}, \text{blue}\}$
    - $B = \{\text{orange}, \text{green}, \text{violet}\}$
    - $C = \{\text{red}, \text{green}, \text{indigo}\}$

    Realice las operaciones con conjuntos indicadas a continuación:
    - $A + B + C$
    - $AC + B$
    - $U(B + C)$
    - BAU
    - $A(BC)'$
    - $A'(B + C)$

Ejemplos

Ejemplos

11. Al menos el 45% de los estudiantes NO aprueban matemáticas Discretas y el 15% de los estudiantes NO aprueban lógica 1. ¿Cuál es el porcentaje máximo de estudiantes que aprueban ambas asignaturas?

Ejemplos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Solución – Ejemplo 1

Represente cada uno de los siguientes conjuntos por el método que usted elija.

- Conjunto de todos los cuadrados que también son círculos.
- Conjunto de todos los equipos de futbol de la liga profesional colombiana.

Solución: En la siguiente tabla se muestra el resultado.

Enunciado	Por extensión	Por comprensión
Conjunto de todos los cuadrados que también son círculos	$A = \emptyset$	*Sea:* • $U = \text{Figuras geometricas planas}$ • $cuadrado(x): x \text{ es un cuadrado}$ • $circulo(x): x \text{ es un } circulo$ $A = \{x \in U \mid cuadrado(x) \wedge circulo(x)\}$
Conjunto de todos los equipos de futbol de la liga profesional colombiana.	$E = \{Nacional, Medellin, \dots, Pasto\}$	*Sea:* • $U = \text{Equipo de futbol en Colombia}$ • $FPC(x): x \text{ es un equipo de la liga FPC}$ $E = \{x \in U \mid FPC(x)\}$

Ejemplos

Solución – Ejemplo 2

Dados los siguientes conjuntos, determine la cardinalidad

- $P = \{\text{Snuzzle, Butterscotch, Blue Belle, Minty, Blossom, Cotton Candy}\}$
- $F = \left\{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{9}, \frac{7}{9}, \frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right\}$
- $C = \{n^3 | n \text{ es un miemtro de } \mathbb{N}\} = \{0^3, 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots\} = \{0,1,8,27,256, \dots\}$

Solución: Recordemos que la cardinalidad es el numero de elementos de un conjunto, de modo que para cada caso nos piden:

- $|P| = n(P) = 6$
- $|S| = n(F) = 9$
- $|C| = n(C) = \infty$

Ejemplos

Solución – Ejemplo 3

Para los siguientes conjuntos, obtenga le numero total de subconjuntos que se puede formar:

- $C = \{\text{Adele}, \text{Beyonce}, \text{Cher}, \text{Madonna}, \text{Shakira}\}$
- $A = \{3\}$

Solución: Para el caso nos piden, el cardinal del conjunto potencia para cada caso:

- $n\big(P(C)\big) = |P(C)| = ?$

  $|P(C)| = 2^{|c|} = 2^5 = 32$

- $n\big(P(A)\big) = |P(A)| = ?$

  $|P(A)| = 2^{|A|} = 2^1 = 2$

Ejemplos

Solución – Ejemplo 4

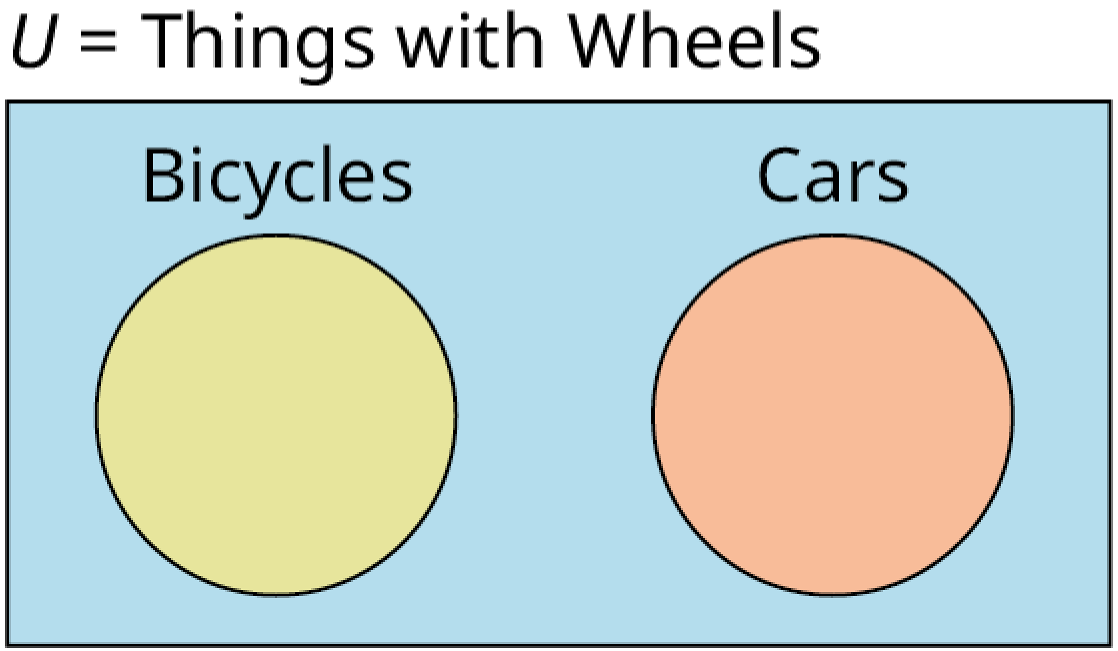
Dibuje un diagrama de Venn que represente las siguientes relaciones:

- Todas las bicicletas y todos los carros tienen ruedas, pero ninguna bicicleta es un carro.
- Todas las mujeres son personas

Solución: Los siguientes diagramas de Venn ilustran la solución para cada caso:

Caso 1: Todas las bicicletas y todos los carros tienen ruedas, pero ninguna bicicleta es un carro.

- $Bycycles \subset U$
- $Bycycles \subseteq U$
- $Cars \subset U$
- $Cars \subseteq U$
- $Bycycles \neq Cars$



Ejemplos

Solución – Ejemplo 4

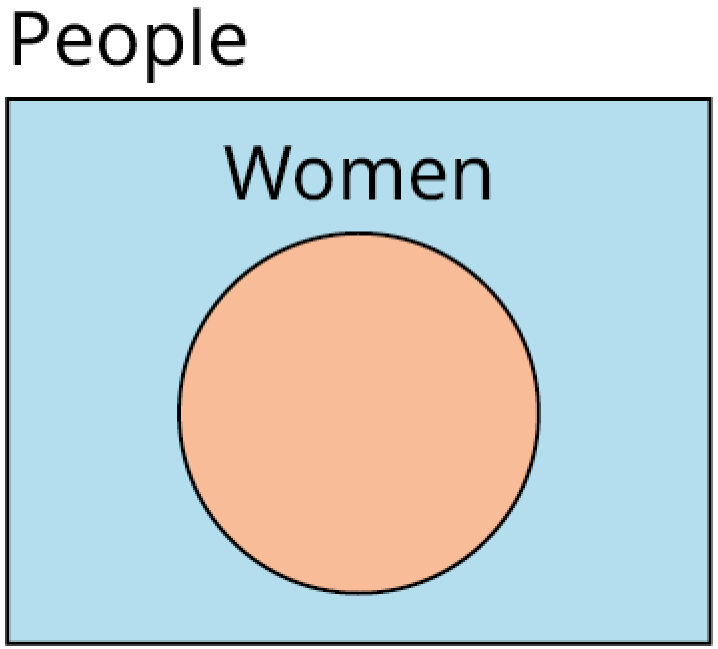
Dibuje un diagrama de Venn que represente las siguientes relaciones:

- Todas las bicicletas y todos los carros tienen ruedas, pero ninguna bicicleta es un carro.
- Todas las mujeres son personas

Solución: Los siguientes diagramas de Venn ilustran la solución para cada caso:

Caso 2: Todas las mujeres son personas.

- $Women \subseteq People$
- $Women \subset People$
- $Women \neq People$



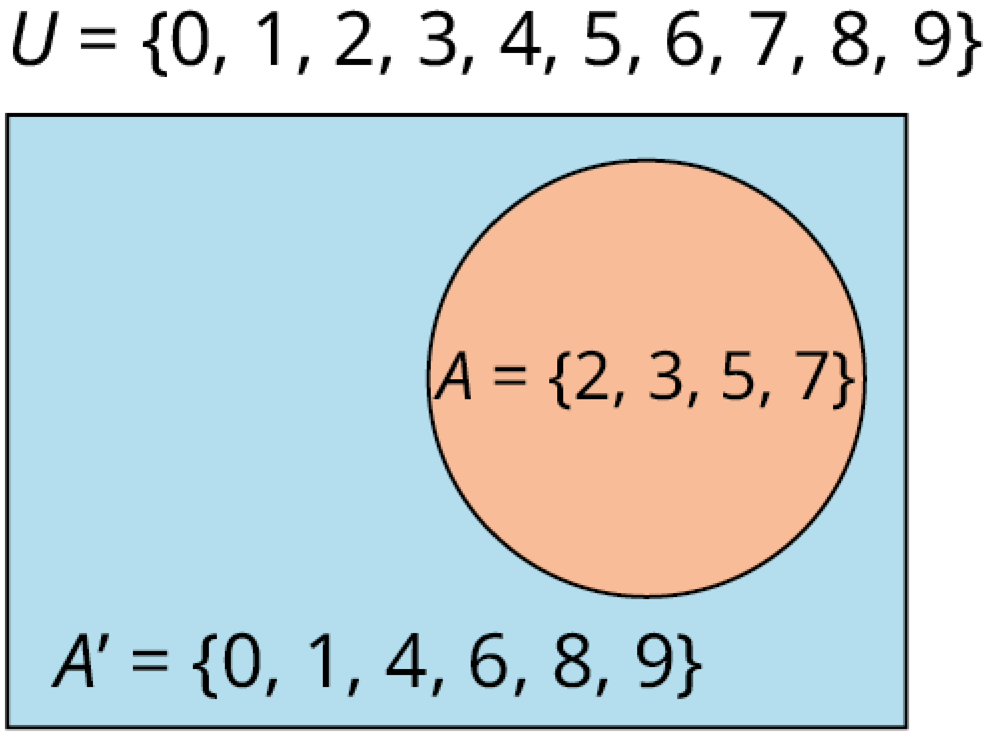
Ejemplos

Solución – Ejemplo 5

Dibuje el diagrama de Venn donde se muestre claramente la relación entre los siguientes conjuntos.

- $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- $A = \{2,3,5,7\}$
- $A' = \{0,1,4,6,8,9\}$

Solución: El siguiente diagrama de Venn ilustra la solución que se pide:

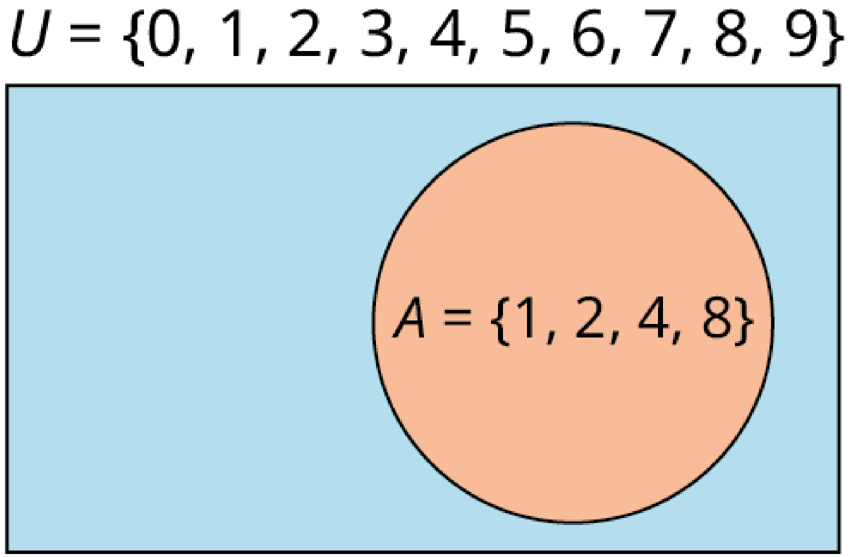


Ejemplos

Solución – Ejemplo 6

Para los siguientes ejercicios, use el diagrama de Venn para determinar A, A' y U

Solución: Para cada caso tenemos:



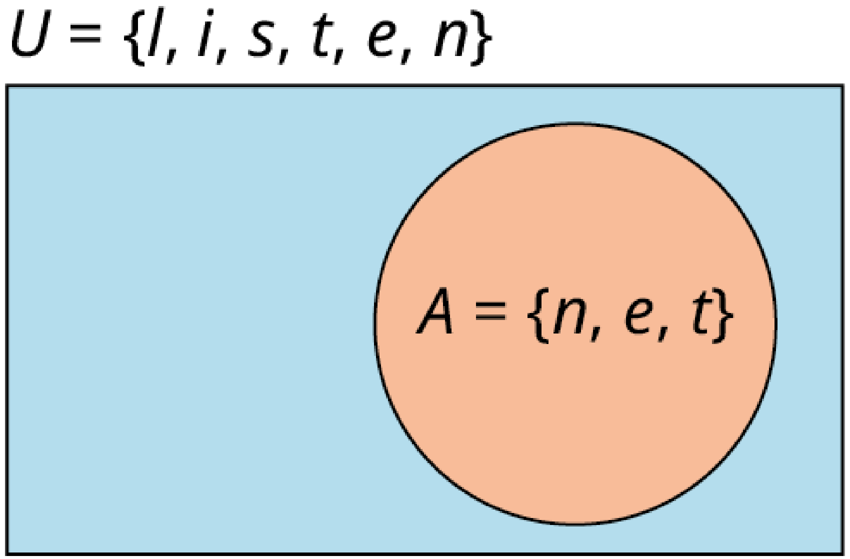


Diagrama 1:

- $U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- $A = \{1,2,4,8\}$
- $A' = \{0,1,3,5,6,7,9\}$

Diagrama 2:

- $U = \{l,i,s,t,e,n\}$
- $A = \{n,e,t\}$
- $U = \{l,i,s\}$

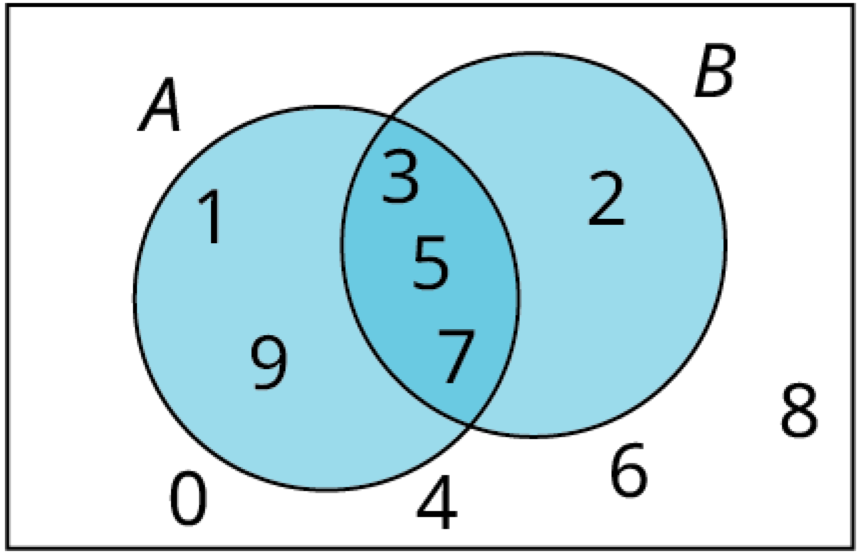
Ejemplos

Solución – Ejemplo 7

Teniendo en cuenta el siguiente diagrama de Venn encuentre:

- $A \cap B$
- $A \cup B$
- $A \cup B'$
- $n(A \cup B')$
- $(A \cup B)'$
- $(A \cap B)'$
- $|(A' \cap B)'|$
- $(A' \cup B')'$

$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

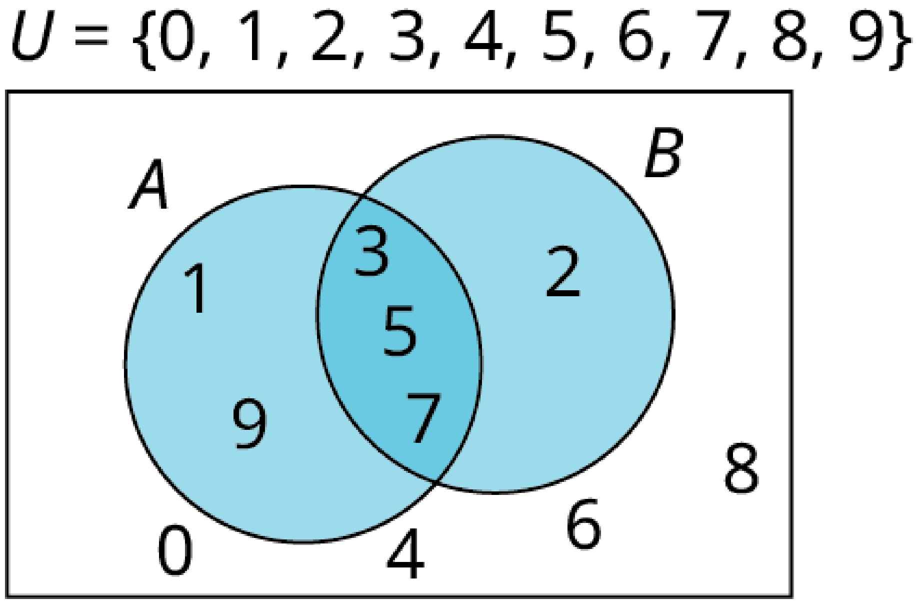


Ejemplos

Solución – Ejemplo 7

Teniendo en cuenta el siguiente diagrama de Venn encuentre:

- $A \cap B = \{3,5,7\}$
- $A \cup B = \{1,9,3,5,7,2\}$
- $A \cup B' = \{1,9,3,5,7\} \cup \{1,9,0,4,6,8\} = \{3,5,7,1,9,0,4,6,8\}$
- $n(A \cup B') = 9$
- $(A \cup B)' = \{0,4,6,8\}$
- $(A \cap B)' = \{1,9,2,0,4,6,8\}$
- $|(A' \cap B)'|$
  - $A' = U - A = \{0,2,4,6,8\}$
  - $(A' \cap B)' = \{2\}' = U - \{2\} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
  - $|(A' \cap B)'| = 9$
- $(A' \cup B')' = A \cap B = \{3,5,7\}$



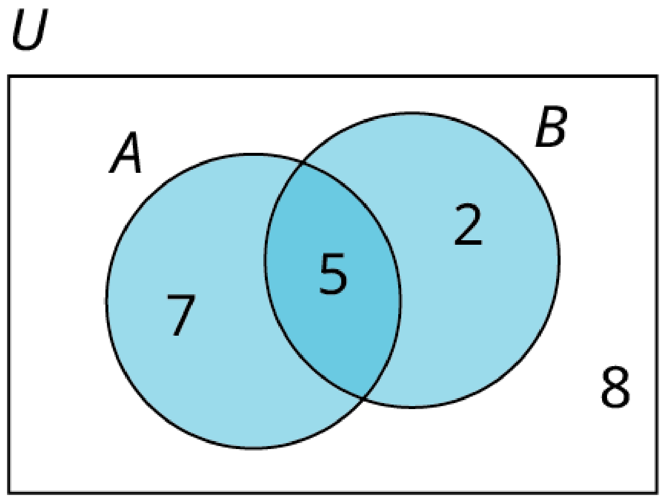
Ejemplos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Solución – Ejemplo 8

El siguiente diagrama de Venn esta dibujado de acuerdo a la cardinalidad de cada uno de los conjuntos. Teniendo en cuenta esta información, y sustentando mediante la aplicación de las identidades básicas de cardinalidad determine a partir de este:

- $|A| = n(A) = 7 + 5 = 12$
- $|B| = n(B) = 2 + 5 = 7$
- $|A \cdot B| = 5$
- $|A + B| = |A| + |B| - |A \cdot B| = 12 + 7 - 5 = 14$
- $|U| = 7 + 5 + 2 + 8 = 22$
- $|(A + B)'| = |U| - |A + B| = 22 - 14 = 8$
- $|A'| = |U| - |A| = 22 - 12 = 10$
- $|A \cdot B'| = 7 = |A \cdot (U - B)| = |A \cdot U - A \cdot B| = |A - A \cdot B| = |A| - |A \cdot B| = 12 - 5 = 7$



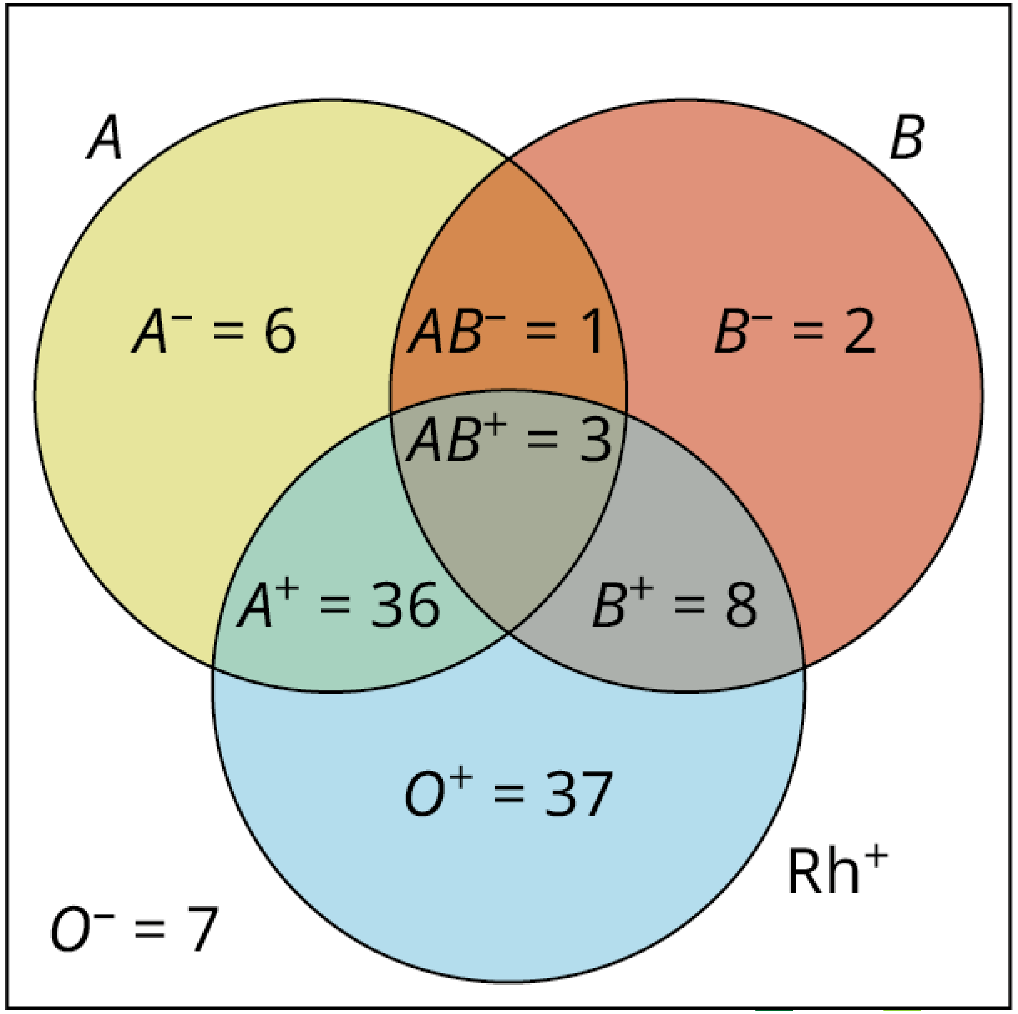
Ejemplos

Solución – Ejemplo 9

Utilice el diagrama de Venn a continuación, que muestra los tipos de sangre de 100 personas que donaron sangre en una clínica local, para responder las siguientes preguntas:

- ¿Cuántas personas con factor sanguíneo A donaron sangre?
- Julio tiene el tipo sanguíneo B+. Si necesita una cirugía que requiera una transfusión de sangre, puede aceptar sangre de cualquier persona que no tenga el factor sanguíneo A. ¿Cuántas personas donaron sangre que Julio puede aceptar?
- ¿Cuántas personas que donaron sangre no tienen el factor sanguíneo Rh+?
- ¿Cuántas personas tenían sangre tipo A y tipo B?

U = Blood types of 100 People



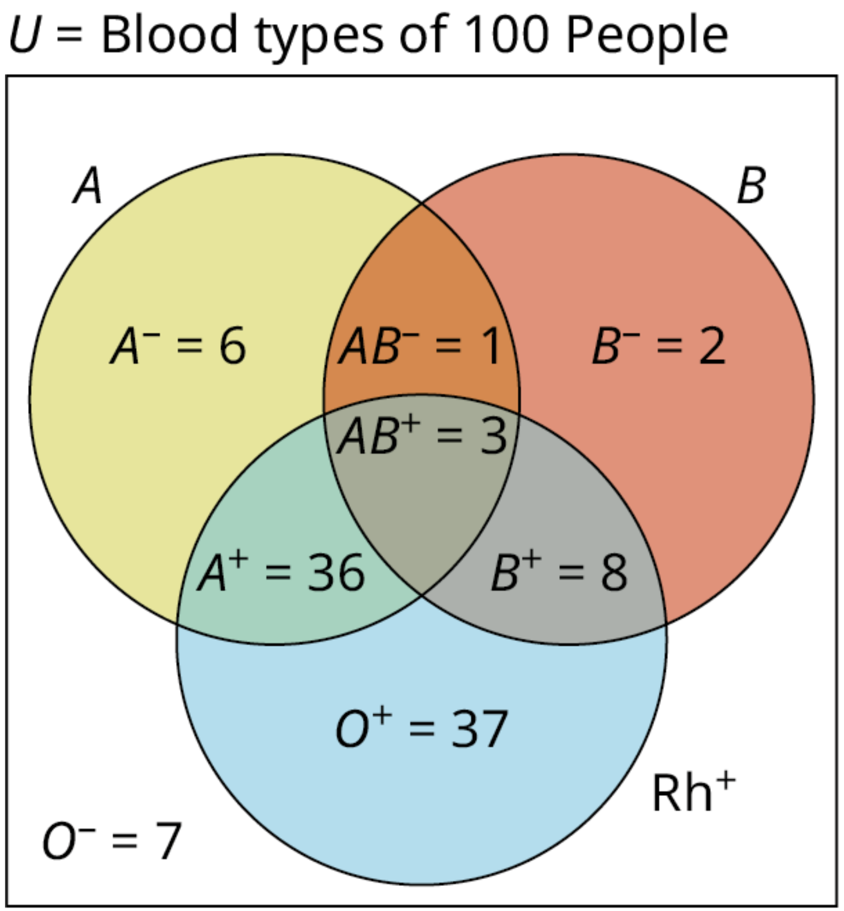
Ejemplos

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Solución – Ejemplo 9

Inicialmente del diagrama de Venn del problema y de las formulas de cardinalidad podemos deducir los siguientes valores:

- $n(A^-) = 6$
- $n(AB^-) = 1$
- $n(AB^+) = 3$
- $n(A^+) = 36$
- $n(B^-) = 2$
- $n(AB^-) = 1$
- $n(AB^+) = 3$
- $n(B^+) = 8$
- $n(O^+) = 37$
- $n(O^-) = 7$
- $n(U) = 100$



Ejemplos

Solución – Ejemplo 9

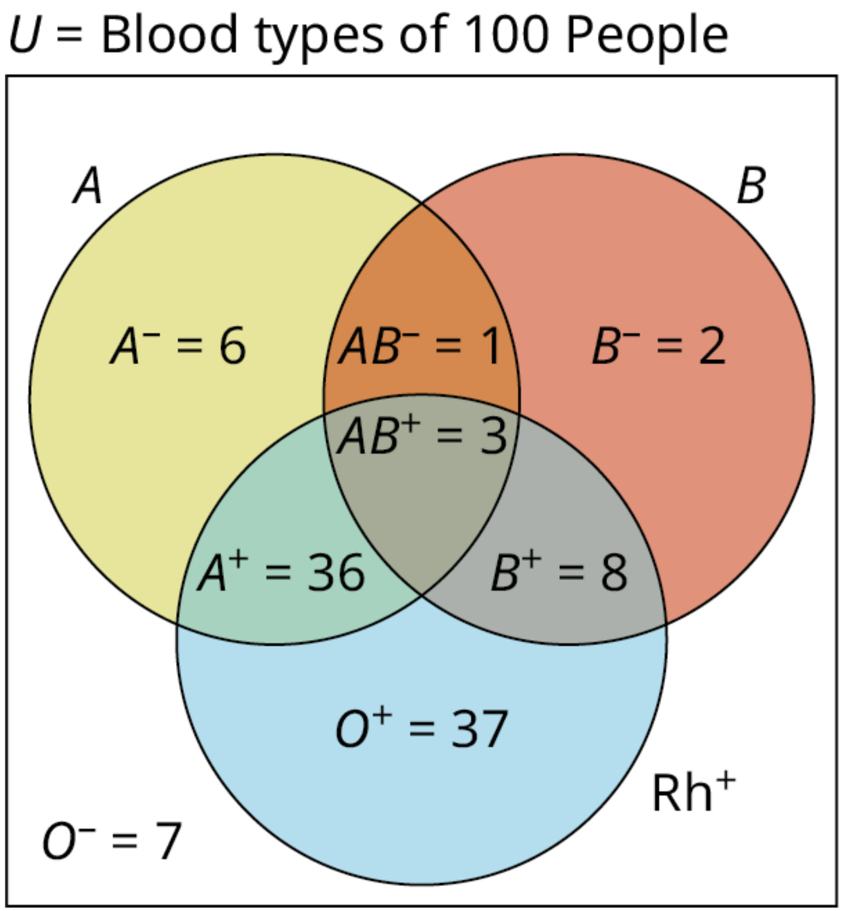
Inicialmente del diagrama de Venn del problema y de las formulas de cardinalidad podemos deducir los siguientes valores:

- **Pregunta**: ¿Cuántas personas con factor sanguíneo A donaron sangre?
  - $n(A) =?$

$$n(A) = n(A^-) + n(AB^-) + n(AB^+) + n(A^+)$$

$$n(A) = 6 + 1 + 3 + 36$$

$$n(A) = 46$$



Ejemplos

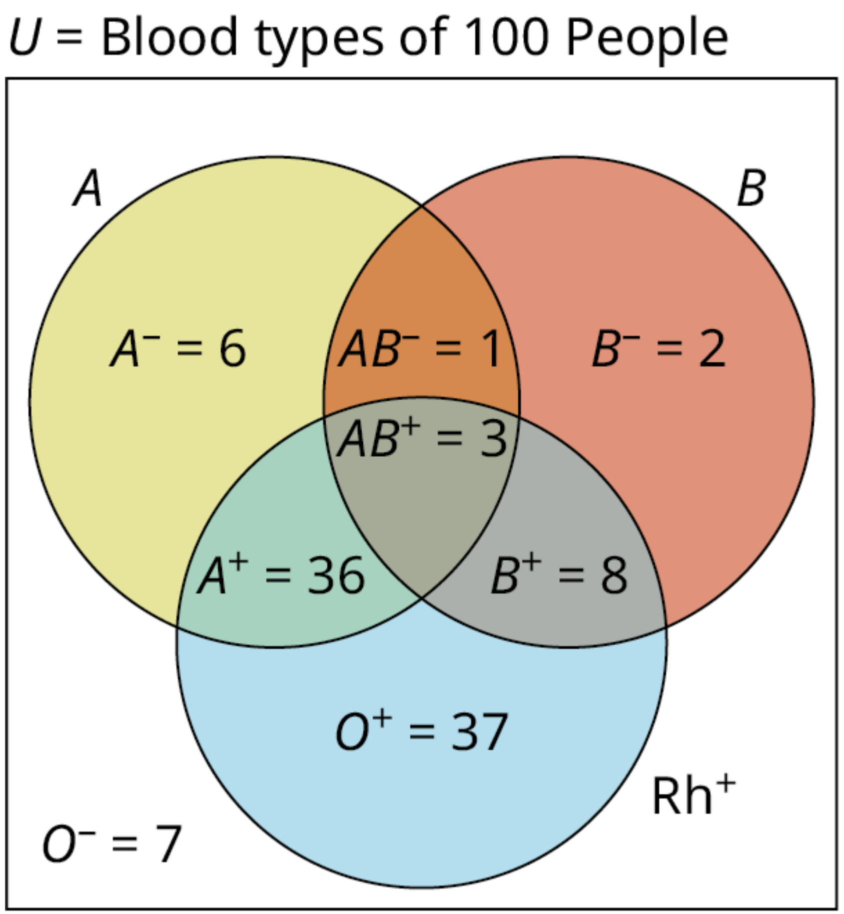
Solución – Ejemplo 9

- **Pregunta**: Julio tiene el tipo sanguíneo B+. Si necesita una cirugía que requiera una transfusión de sangre, puede aceptar sangre de cualquier persona que no tenga el factor sanguíneo A. ¿Cuántas personas donaron sangre que Julio puede aceptar?
  - Julio puede recibir sangre tipo: B^+, B^-, O^+ u O^- de modo que la solución será:

$$n(Julio) = n(B^-) + n(B^+) + n(O^+) + n(O^-) =$$

$$n(Julio) = 2 + 8 + 37 + 7$$

$$n(Julio) = 54$$



Ejemplos

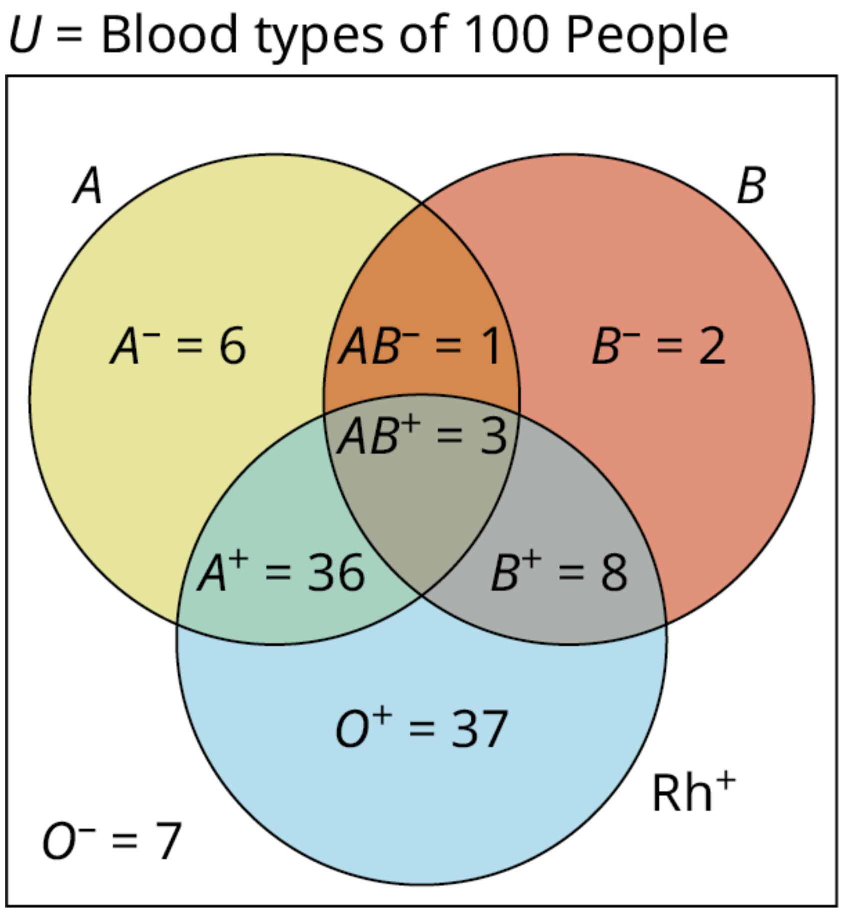
Solución – Ejemplo 9

- **Pregunta**: ¿Cuántas personas que donaron sangre no tienen el factor sanguíneo Rh+?

$$n(Rh^{-}) =?$$

$$n(Rh^{-}) = n(A^{-}) + n(AB^{-}) + n(B^{-}) + n(O^{-})$$

$$n(Rh^{-}) = 6 + 1 + 2 + 7 = 16$$



Ejemplos

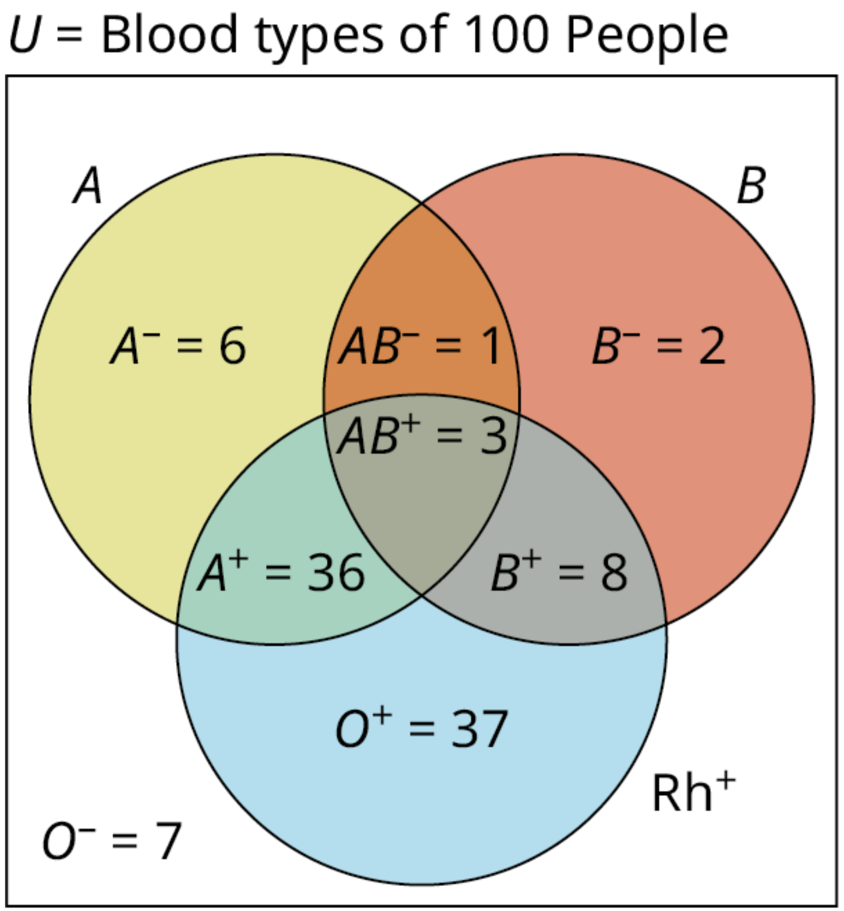
Solución – Ejemplo 9

- **Pregunta**: ¿Cuántas personas tenían sangre tipo A y tipo B?

$$n(AB) = n(AB^-) + n(AB^+) = 1 + 3 = 4$$

$$n(A + B) = n(A) + n(B) - n(AB)$$

$$n(AB) = n(A) + n(B) - n(A + B) = 46 + 14 - 56 = 4$$



Ejemplos

Solución – Ejemplo 10

Dados los siguientes conjuntos:

- $U = \{\text{red, orange, yellow, green, blue, indigo, violet}\}$
- $A = \{\text{red, yellow, blue}\}$
- $B = \{\text{orange, green, violet}\}$
- $C = \{\text{red, green, indigo}\}$

Realice las operaciones con conjuntos indicadas a continuación:

- $A + B + C = \{\text{red, yellow, blue, orange, green, violet, indigo}\} = U$
- $AC + B = \{\text{red}\} + \{\text{orange, green, violet}\} = \{\text{red, orange, green, violet}\}$
- $U(B + C) = B + C = \{\text{orange, green, violet, red, indigo}\}$
- $BAU = BA = AB = \{\ \ \} = \emptyset$
- $A(BC)' = \{\text{red, yellow, blue}\} \cdot \{\text{green}\} = \{\ \ \} = \emptyset$
- $A'(B + C) = \{\text{red, orange, yellow, green, blue, indigo, violet}\} \cdot \{\text{orange, green, violet, red, indigo}\} =$

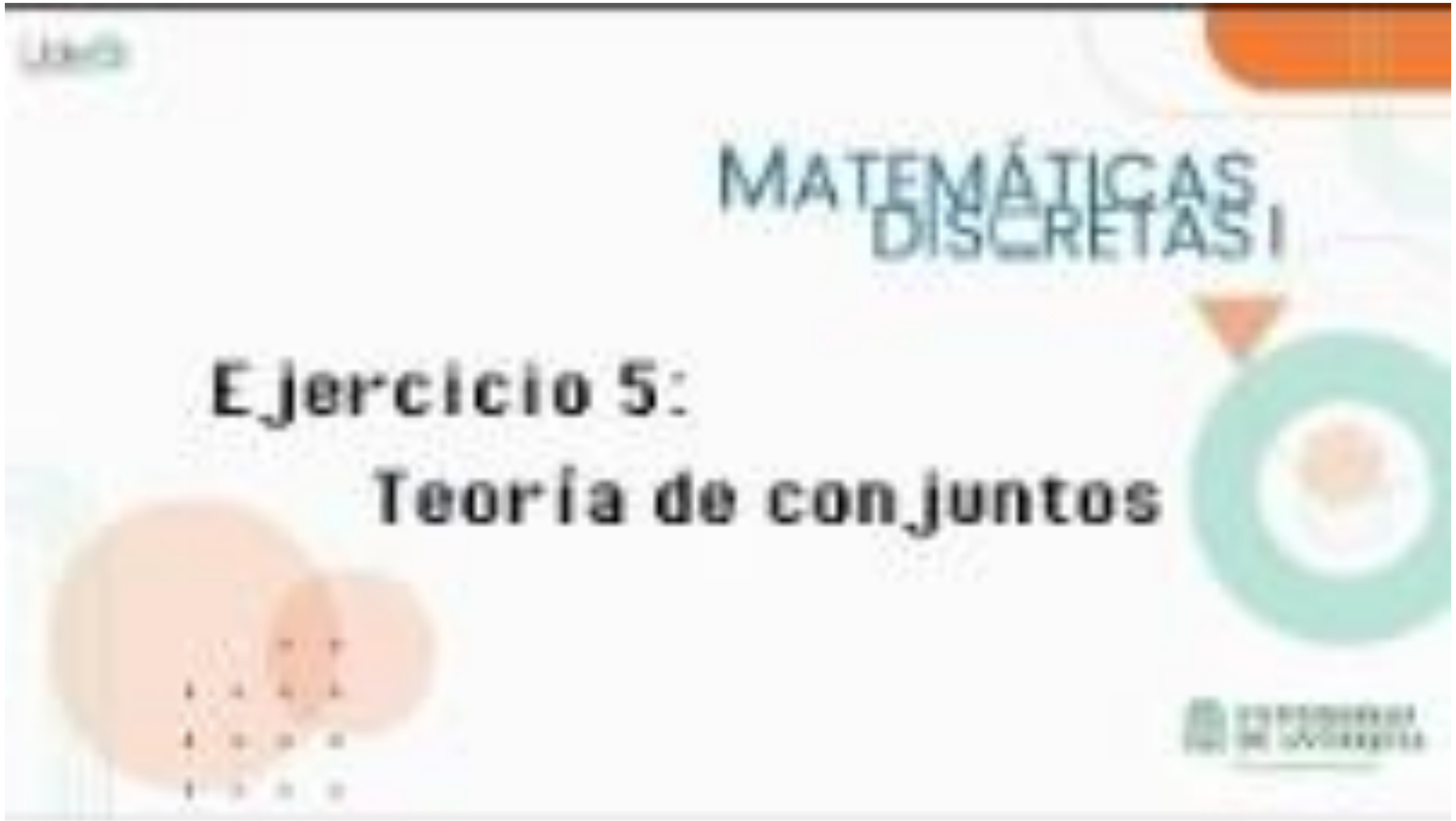
  $A'(B + C) = \{\text{red, orange, green, indigo, violet}\}$

Ejemplos

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Solución – Ejemplo 11

Al menos el 45% de los estudiantes NO aprueban matemáticas Discretas y el 15% de los estudiantes NO aprueban lógica 1. ¿Cuál es el porcentaje máximo de estudiantes que aprueban ambas asignaturas?



Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Introducción
- Conceptos básicos
- Relaciones entre conjuntos
- Tipos de conjuntos
- Operaciones con conjuntos
- Identidades
- Ejemplos
- **Programación**

Ejemplo:

Sea A el conjunto de todas las letras que conforman la palabra calculo ‘calculo’ y B el conjunto asociado de letras que aparecen en ‘matemáticas discretas’. Determine:

1. La representación por comprensión y extensión de cada conjunto.
2. El conjunto universal.
3. Dibuje el diagrama de ven que represente el problema.
4. Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos.
5. Las letras que aparecen en ambos conjuntos.
6. Las que solo aparecen en el conjunto A pero que no están en el conjunto B.
7. Las que solo aparecen en el conjunto B pero que no están en el conjunto A.
8. Las letras que no se encuentran en A.
9. Las letras que no se encuentran en B.
10. Las letras que están solo en A o en B.

Programación

Puntos 1 y 2 (link):

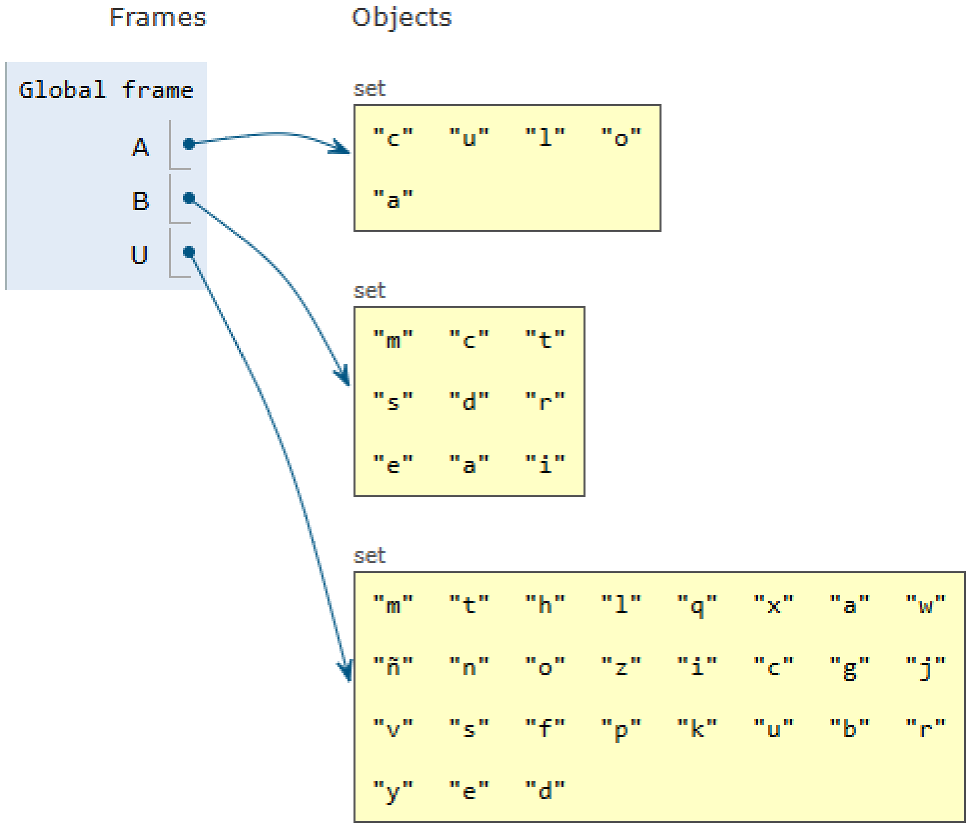
1. La representación por comprensión y extensión de cada conjunto.
2. El conjunto universal.

Conjunto	**Representación por extensión**
letras que conforman la palabra calculo ‘calculo’	$A = \{c, a, l, u, o\}$
letras que aparecen en ‘matemáticas discretas’	$B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$
Abecedario español en minúsculas	$U = \{a, b, c, \ldots, m, n, ñ, o, p, \ldots, x, y, z\}$
Conjunto	**Definición en python**

letras que conforman la palabra calculo ‘calculo’	`# Forma 1`
	`A = set("calculo")`
	`# Forma 2`
	`A = {"c","a","l","c","u","l","o"}`

letras que aparecen en ‘matemáticas discretas’	`# Forma 1`
	`B = set("matematicasdiscretas")`
	`# Forma 2`
	`B = {"m","a","t","e","m","a","t","i","c","a","s",`
	`"d","i","s","c","r","e","t","a","s"}`

Abecedario español en minúsculas	`# Forma 1`
	`U = set("abcdefghijklmnñopqrstuvwxyz")`
	`# Forma 2`
	`U = {"a","b","c","d","e","f","g","h",`
	`"i","j","k","l","m","n","ñ","o",`
	`"p","q","r","s","t","u","v","w",`
	`"x","y","z"}`



Programación

Punto 3:

3. Dibuje el diagrama de ven que represente el problema.

Diagrama de Venn a mano

$$A = \{c, a, l, u, o\}$$
$$B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$$
$$U = \{a, b, c, \ldots, m, n, ñ, o, p, \ldots, x, y, z\}$$

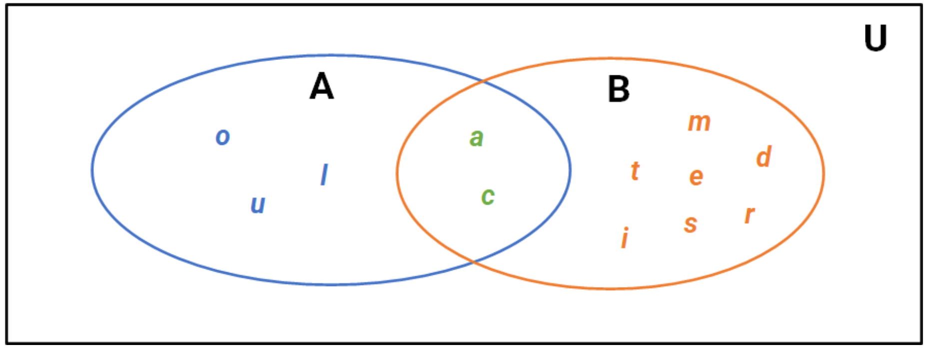
Diagrama de Venn generado en python

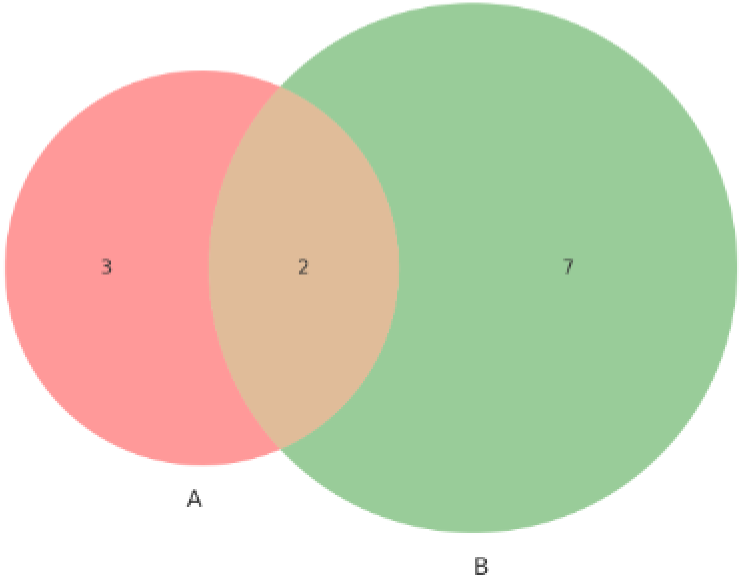
```
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib_venn import venn2

# Crear el diagrama de Venn
plt.figure(figsize=(8, 6))
venn2([A, B], set_labels=("A", "B"))
plt.title("Diagrama de Venn de A y B")
plt.show()
```

Importante: Si no están instaladas, es necesario instalar las bibliotecas `matplotlib` y `matplotlib-venn`

```
pip install matplotlib matplotlib-venn
```



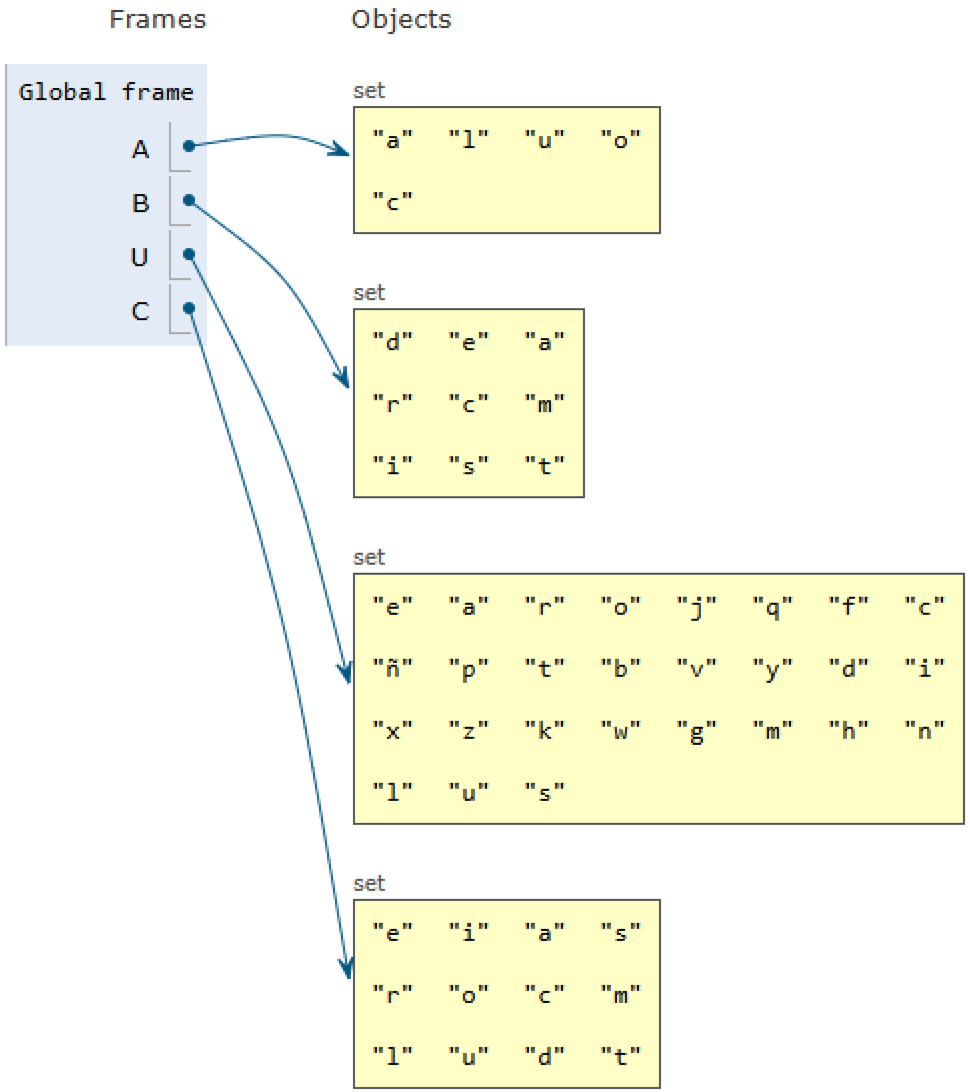


Puntos 4 (link):

4. Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos.

Conjunto	Representación por extensión
Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos.	$A = \{c, a, l, u, o\}$ $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$ $C = A \cup B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r, l, u, o\}$
Conjunto	**Definición en python**

letras que conforman la palabra calculo ‘calculo’	`# Forma 1`
	`C = A|B`
	`# Forma 2`
	`C = A.union(B)`

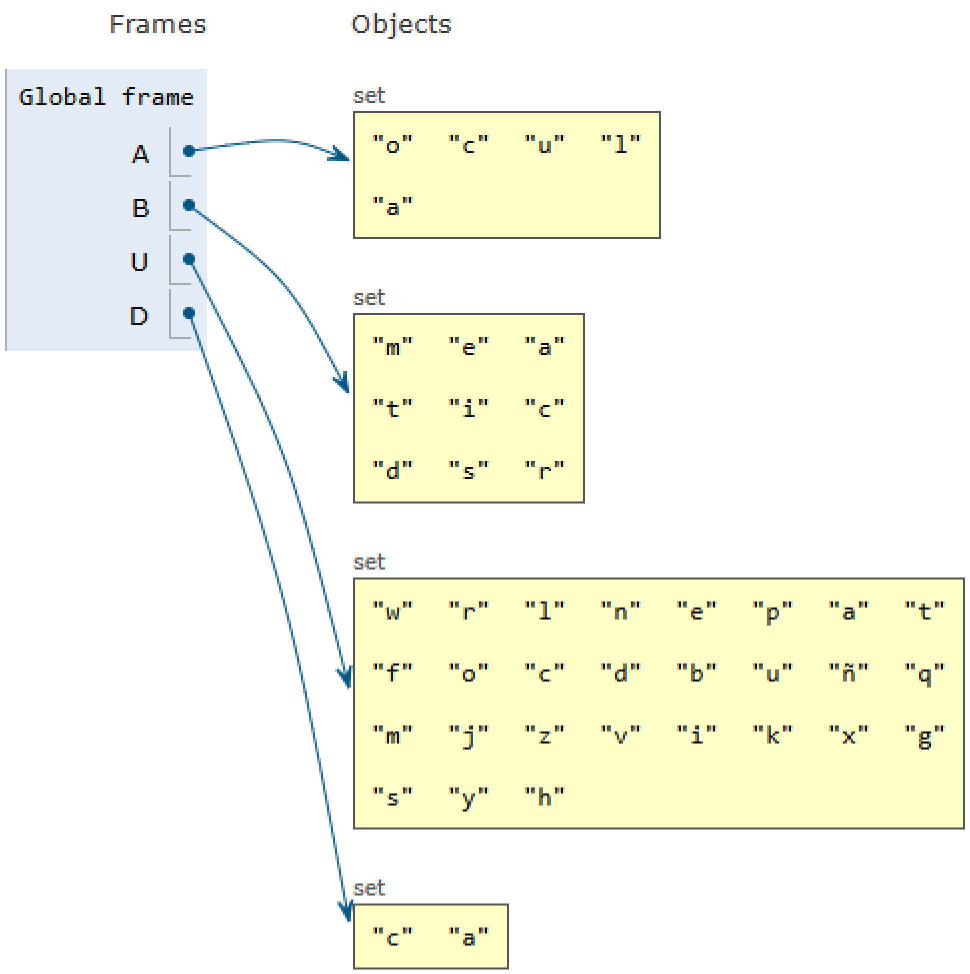


Punto 5 (link):

5. Las letras que aparecen en ambos conjuntos.

Conjunto	**Representación por extensión**
Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos.	$A = \{c, a, l, u, o\}$ $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$ $D = A \cap B = \{a, c\}$
Conjunto	**Definición en python**

letras que conforman la palabra calculo 'calculo'	`# Forma 1`
	`D = A&B`
	`# Forma 2`
	`D = A.intersection(B)`



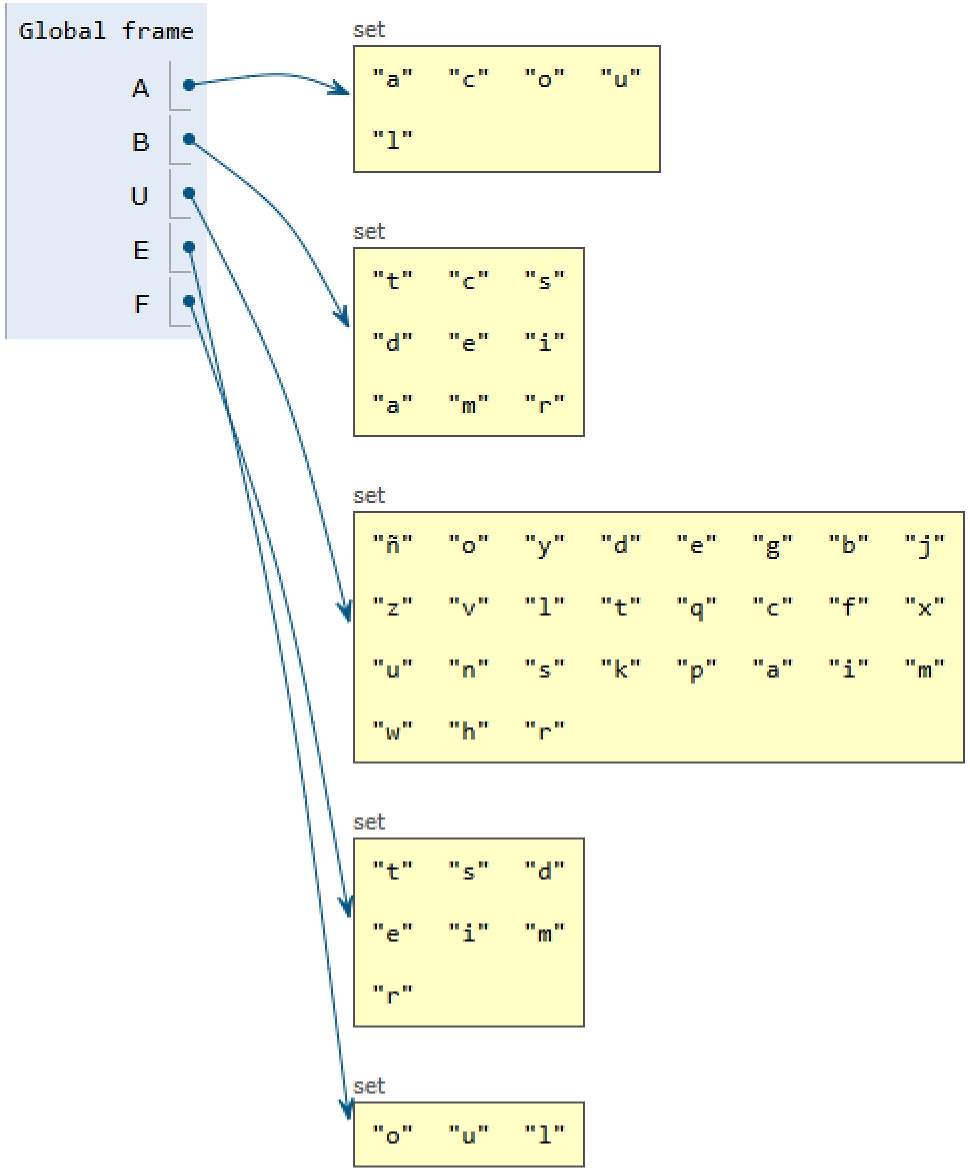
Programación

Puntos 6 y 7 (link):

6. Las que solo aparecen en el conjunto A pero que no están en el conjunto B.
7. Las que solo aparecen en el conjunto B pero que no están en el conjunto A.

Conjunto	**Representación por extensión**
Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos.	$A = \{c, a, l, u, o\}$ $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$ $E = A - B = \{l, u, o\}$ $F = B - A = \{m, t, e, i, s, d, r\}$
Conjunto	**Definición en python**

letras que conforman la palabra calculo 'calculo'	`# Forma 1`
	`E = A-B`
	`F = B-A`
	
	`# Forma 2`
	`E = A.difference(B)`
	`F = B.difference(A)`



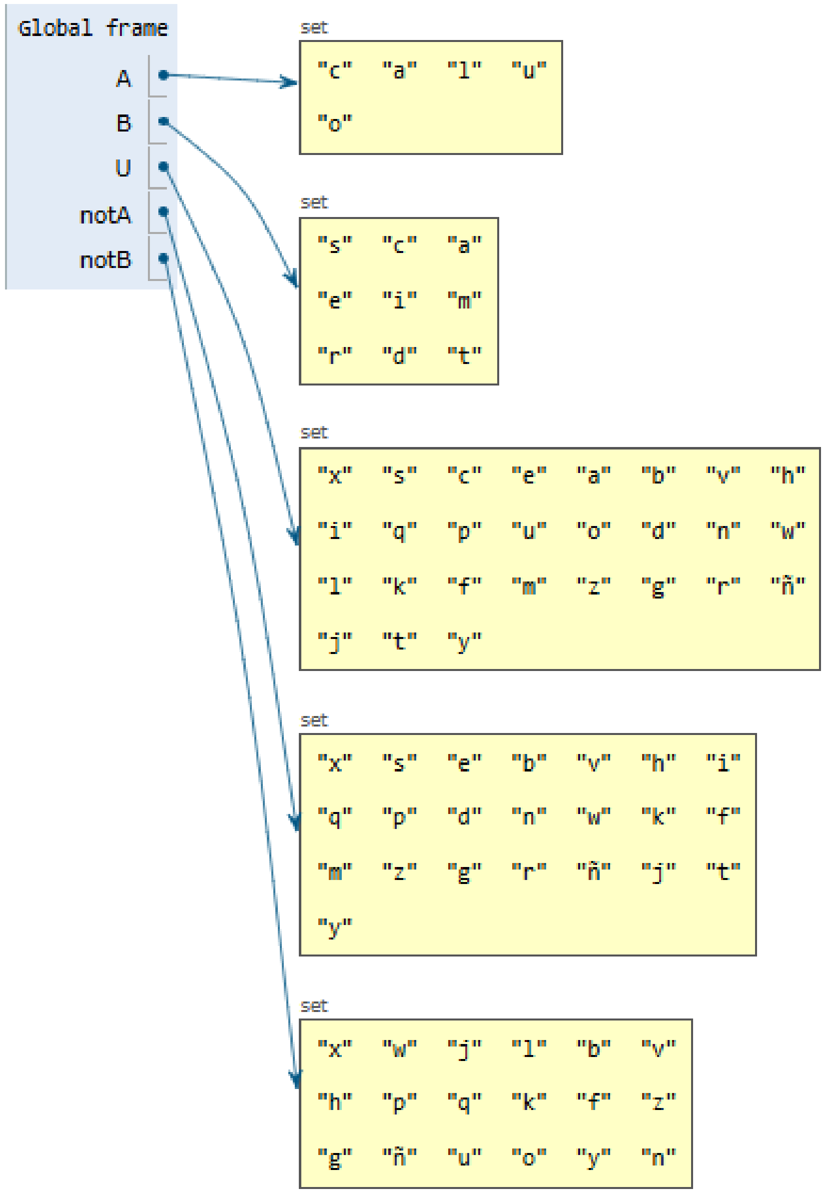
Programación

Puntos 8 y 9 (link):

8. Las letras que no se encuentran en A.
9. Las letras que no se encuentran en B.

Conjunto	**Representación por extensión**
Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos.	$A = \{c, a, l, u, o\}$ $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$ $A' = \{l, u, o\}$ $B' = \{m, t, e, i, s, d, r\}$
Conjunto	**Definición en python**

letras que conforman la palabra calculo 'calculo'	`# Forma 1`
	`notA = U-A`
	`notB = U-B`
	
	`# Forma 2`
	`notA = U.difference(A)`
	`notB = U.difference(B)`



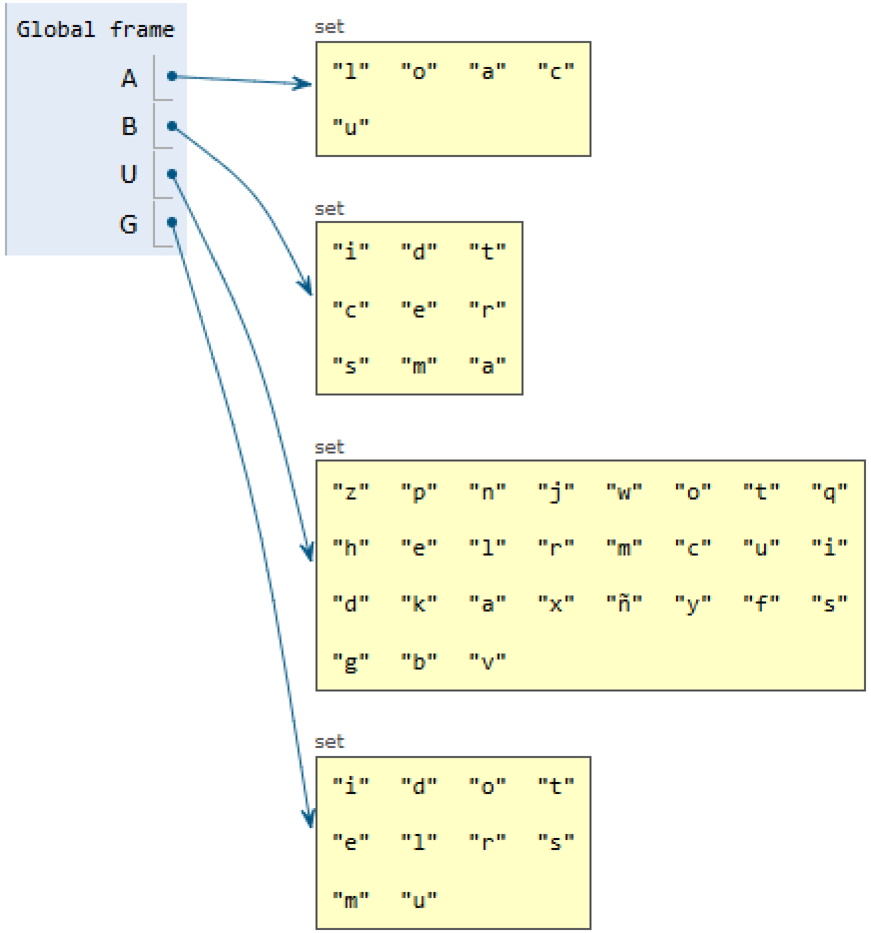
Programación

Punto 10 (link):

10. Las letras que están solo en A o en B.

Conjunto	**Representación por extensión**
Las letras que aparecen en cualquiera de los dos conjuntos.	$A = \{c, a, l, u, o\}$ $B = \{m, a, t, e, i, c, s, d, r\}$ $A' = \{l, u, o\}$ $B' = \{m, t, e, i, s, d, r\}$
Conjunto	**Definición en python**

letras que conforman la palabra calculo 'calculo'	`# Forma 1`
	`G = A^B`
	
	`# Forma 2`
	`G = A.symmetric_difference(B)`



UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Curso de Matemáticas Discretas 1

Clase 8 – Teoría de conjuntos