Curso
Matemáticas Discretas I

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Clase 9 – Funciones

Agenda

- Conceptos preliminares
- Funciones
- Algunas funciones importantes

Agenda

- **Conceptos preliminares**
- Funciones
- Algunas funciones importantes

Conceptos preliminares

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

N-tupla ordenada

Una n-tupla, $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, es una secuencia ordenada y finita de n elementos donde:

- **El orden importa**: A diferencia de los conjuntos, la posición de cada elemento es fundamental.
- **Se permiten repeticiones**: Un mismo elemento puede aparecer varias veces en una tupla. Por ejemplo $(1,2,3)$, es una 3-tupla valida
- **Igualdad**: Para garantizar la igualdad entre dos n-tuplas $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ además del mismo tamaño, los elementos deben ser iguales y estar en el mismo orden:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \leftrightarrow a_1 = b_1 \land a_2 = b_2 \land \cdots \land a_n = b_n$$

- Cada elemento puede provenir de un conjunto diferente (o del mismo conjunto).
- El termino **n-tupla** nos permite hablar de estas secuencias sin importar su longitud especifica.

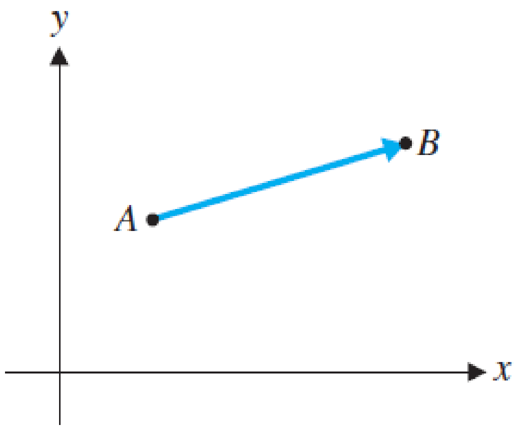
Conceptos preliminares

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

N-tupla ordenada

Ejemplos de n-tuplas: Matemáticas – Algebra lineal

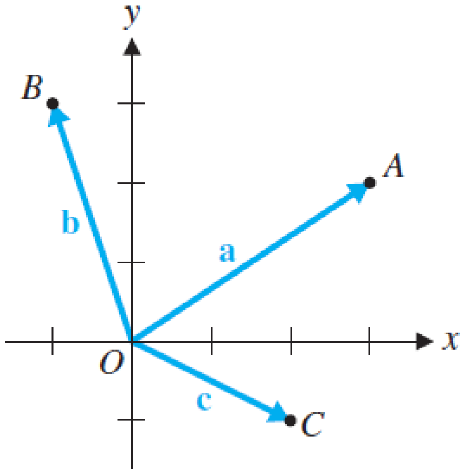
Vectores en R^2



Par ordenado:

$$(x, y) = [x, y] = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Vectores en R^3



Terna ordenada:

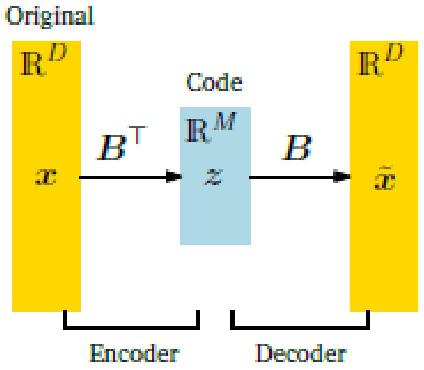
$$(x, y, z) = [x, y, z] = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

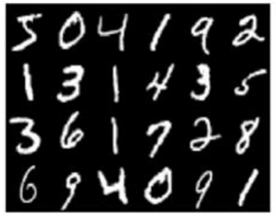
Transformaciones

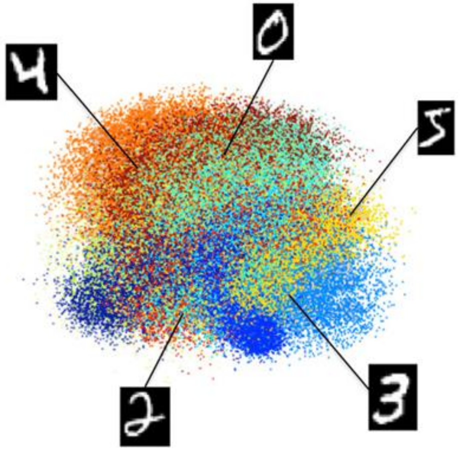
$$\boldsymbol{T}: V \rightarrow W$$

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$T(|x\rangle) = T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x - y \\ x + y \end{bmatrix}$$







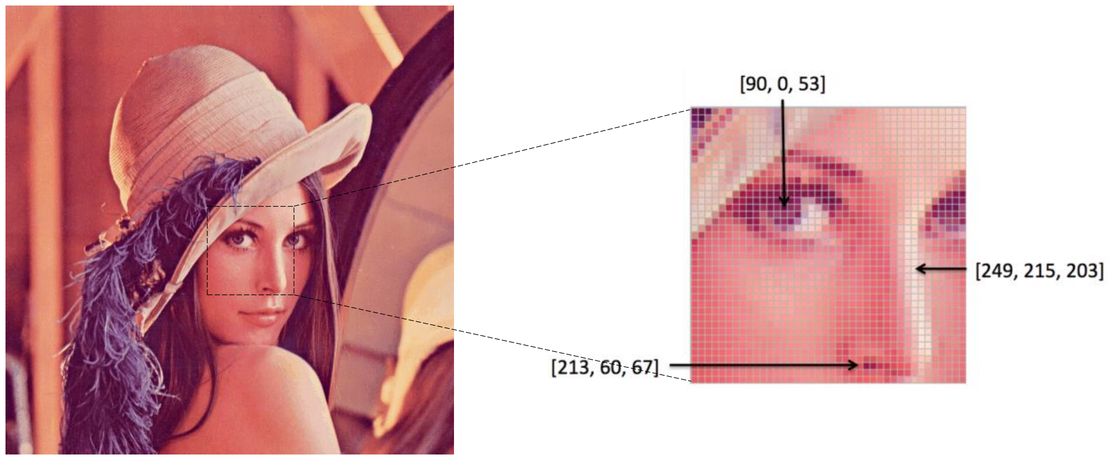
Conceptos preliminares

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

N-tupla ordenada

Ejemplos de n-tuplas: Matemáticas – Imágenes

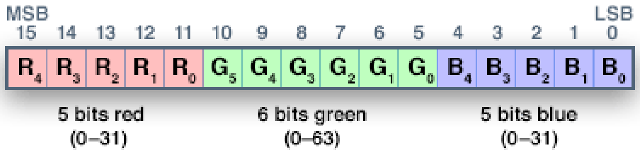
Color RGB



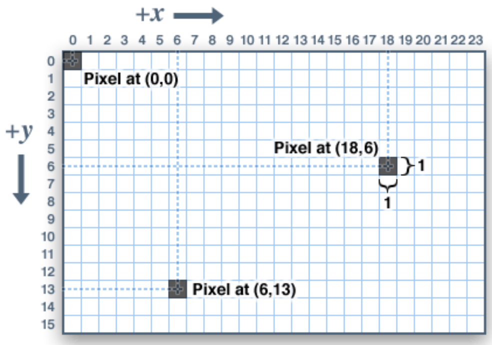
Lenna (link)

Terna ordenada: Color del pixel

$$(R, G, B)$$



Posición de un pixel



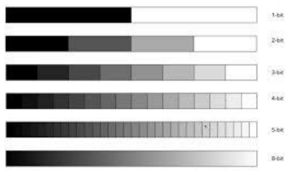
Par ordenado: Coordenadas del pixel

$$(i, j)$$

Escala de grises

1-tupla: Escala de gris

$$(G)$$



Conceptos preliminares

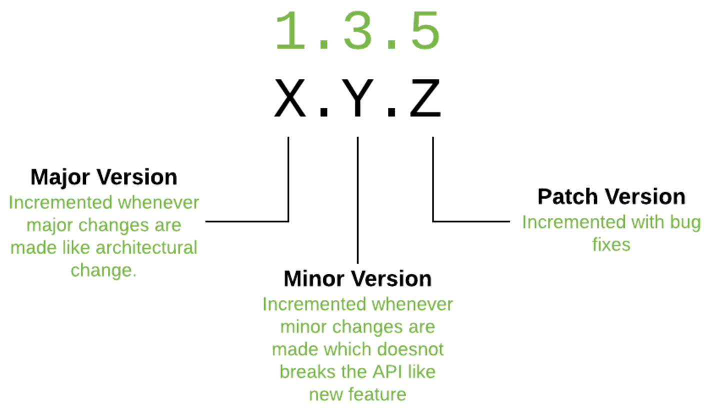
N-tupla ordenada

Ejemplos de n-tuplas: Matemáticas – Rotulación

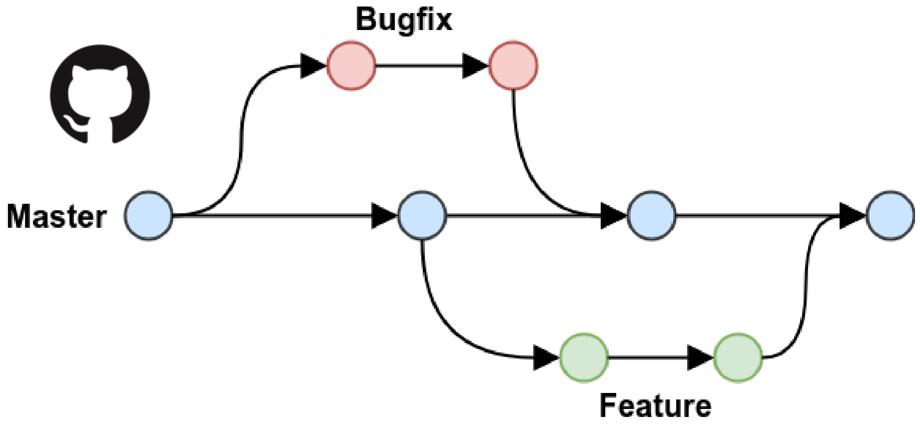
Versionado de software

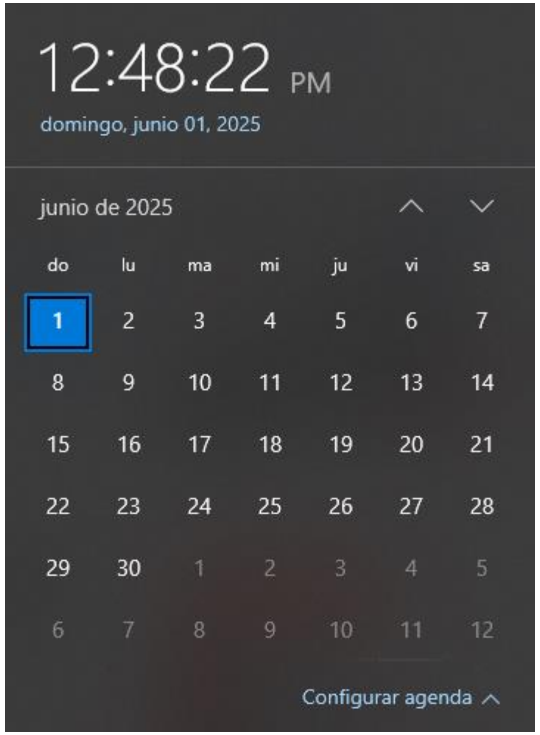
Terna ordenada:

$$(Major, Minor, Patch)$$



Versionado de software (link)





Hora

Terna ordenada:

$$(HH, MM, SS)$$

Fecha

Terna ordenada:

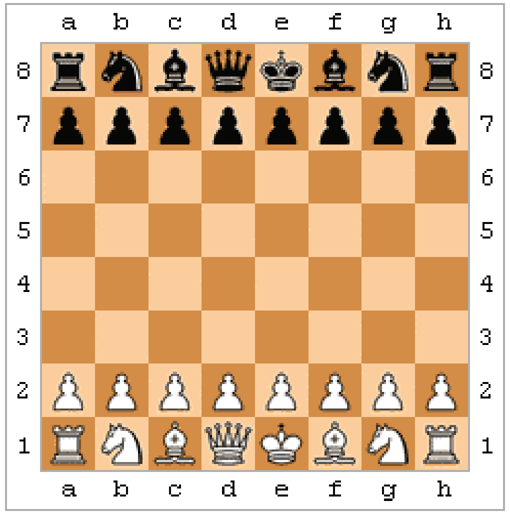
$$(DD, MM, YYYY)$$

Conceptos preliminares

N-tupla ordenada

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Ejemplos de n-tuplas: Matemáticas – Juegos



Ajedrez (link) – Mate Pastor (link)

```
[Event "Scholars' Mate]
[Site "?]
[Date "?]
[Round "?]
[White "?]
[Black "?]
[Result "1-0]
1. e4 e5
2. Qh5 Nc6
3. Bc4 Nf6
4. Qxf7#
```

Notación portátil de Partida (link)

4-tupla

2-tupla

```
MP = (
      ("e4", "e5"),
      ("Qh5", "Nc6"),
      ("Bc4", "Nf6"),
      ("Qxf7#", null)
     )
```

Elemento	Tipo de tupla	Representación	Descripción
Metadatos	7-tupla	("Scholars' Mate", "?", "?", "?", "?", "?", "1-0")	(Evento, sitio, fecha, ronda, blancas, negras, resultado)
Turno (Par de jugadas)	2-tupla	("e4", "e5")	Blancas: peón a e4, Negras: peón a e5
Jugada individual	5-tupla	(“Q", "x", "f7", "#", null)	(Pieza, Captura, CasillaDestino, Jaque/JaqueMate, Promoción)

Conceptos preliminares

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

N-tupla ordenada

Ejemplos de n-tuplas: Matemáticas – Tablas

Estudiantes

ID	Nombre	Apellido	Semestre
205	Sofia	Garcia	3
113	Mateo	Rojas	4
451	Sofia	Torres	3

Registro de la tabla

```
(205, "Sofia", "Garcia", 3)
```

4 tupla:

```
(ID, Nombre, Apellido, Semestre)
```

Conceptos preliminares

Producto cartesiano: Fabrica para crear tuplas

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B se denota como $A \times B$ y se como el conjunto de todas las posibles parejas (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$ lo cual se denota formalmente (de diferentes maneras como) como:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

$$(a, b) \in A \times B \leftrightarrow a \in A \wedge b \in B$$

$$(a, b) \notin A \times B \leftrightarrow a \notin A \wedge b \notin B$$

El producto cartesiano se puede generalizar para mas de dos conjuntos lo cual permite la generación de n-tuplas. En otras palabras, el producto cartesiano de n conjuntos A_1, A_2,…, A_n consiste en el conjunto de n-tuplas ordenadas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, donde $a_i \in A_i$ para $i = 1,2, \ldots, n$ cual formalmente se expresa como:

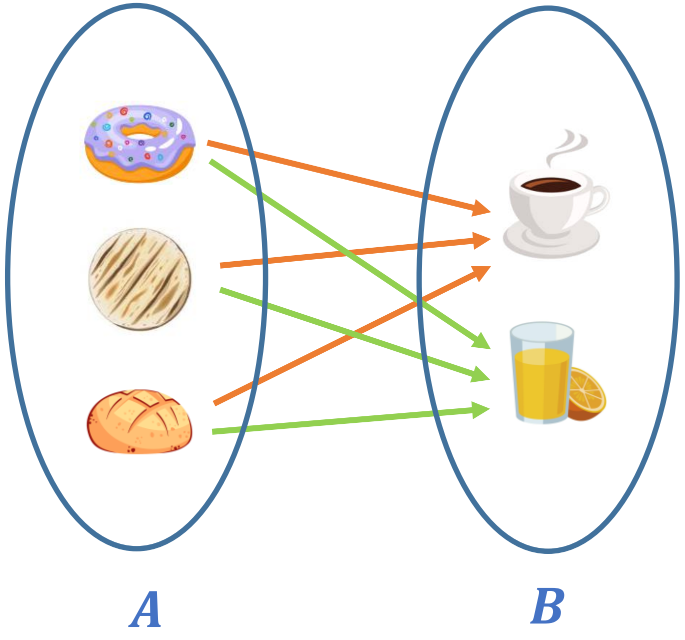
$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i \text{ para } i = 1,2, \ldots, n\}$$

Conceptos preliminares

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Producto cartesiano: Fabrica para crear tuplas

Ejemplo 1: Suponga que usted no desayuno en la casa hoy va a un restaurante donde permiten armar un combo desayuno a partir de la combinación de una comida (rosquilla, arepa, pan) con una bebida (café, jugo). De acuerdo a la información anterior ¿Cuántos combos posibles se pueden armar?



Solución: (código) Sean los conjuntos A y B los conjuntos asociados a las comidas y bebidas, y C el conjunto asociado a los combos tenemos:

- $A = \{rosquilla, arepa, pan\}$
- $B = \{cafe, jugo\}$

Los combos corresponden al conjunto cartesiano formado por los elementos de A y B:

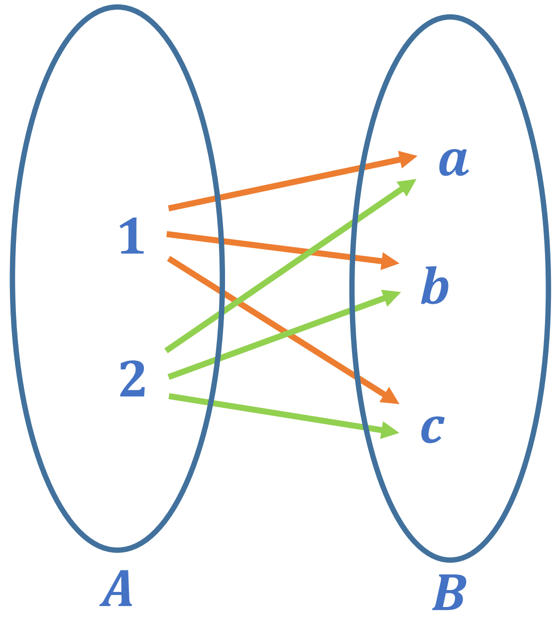
$$C = A \times B = \{(a, b) | a \in A \wedge b \in B\}$$

$$C = A \times B = \{(rosquilla, cafe), (rosquilla, jugo), (arepa, cafe), (arepa, jugo), (pan, cafe), (pan, jugo)\}$$

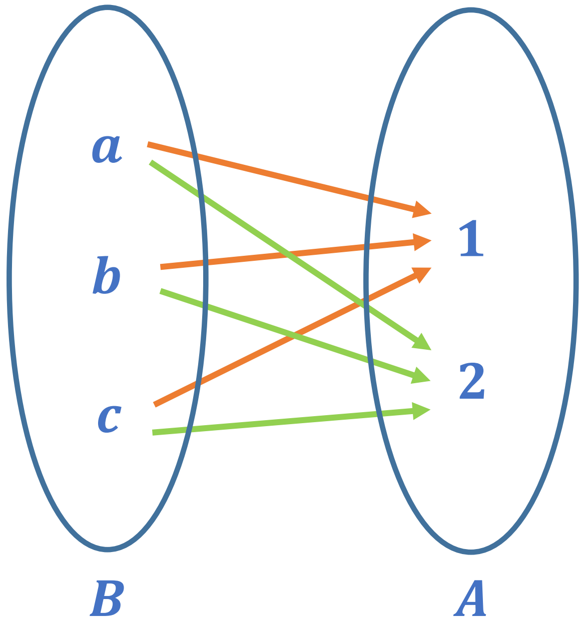
Conceptos preliminares

Producto cartesiano: Fabrica para crear tuplas

Ejemplo 2: (código) Dados los conjuntos $A = \{1,2\}$ y $B = \{a, b, c\}$, obtenga $A \times B$ y $B \times A$



$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$



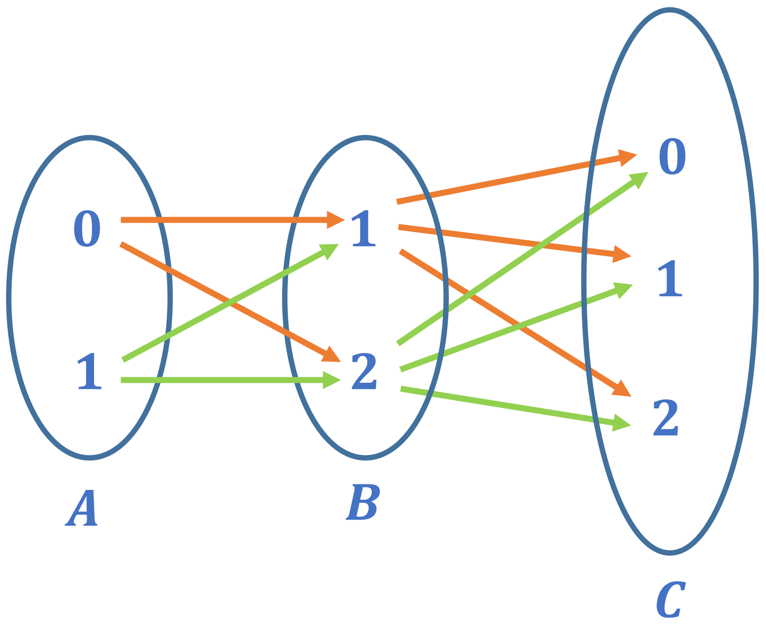
$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), (c, 1), (c, 1)\}$$

Repaso clase anterior

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Producto cartesiano: Fabrica para crear tuplas

Ejemplo 3: Cual es el producto cartesiano $A \times B \times C$, donde $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$ y $C = \{0,1,2\}$



Solución: (código) Sean los conjuntos A, B y C el conjunto asociado a los combos tenemos:

- $A = \{0,1\}$
- $B = \{1,2\}$
- $C = \{0,1,2\}$

El producto cartesiano de A y B:

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) | a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\}$$

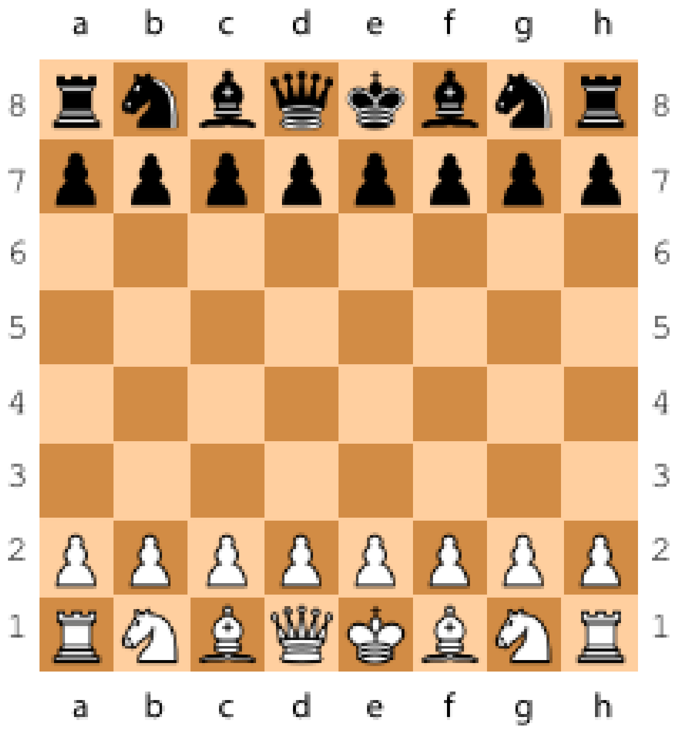
$$A \times B \times C = \{(0,1,0), (0,1,1), (0,1,2), (0,2,0), (0,2,1), (0,2,2), (1,1,0), (1,1,1), (1,1,2), (1,2,0), (1,2,1), (1,2,2)\}$$

Conceptos preliminares

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Producto cartesiano: Fabrica para crear tuplas

Ejemplo 4: Un tablero de ajedrez es una cuadrícula de 8 por 8. Los jugadores de ajedrez utilizan la llamada “notación algebraica” para referirse a las columnas (files) usando las letras de la 'a' a la 'h', y se refieren a las filas (ranks) usando los números del 1 al 8.



Solución: A continuación se muestran diferentes maneras de describir el tablero de ajedrez y alguna información de sus piezas usando productos cartesianos. Para ello inicialmente vamos a definir los siguiente conjuntos:

- $A = \{x | x \text{ es una columna del tablero}\}$
- $B = \{x | x \text{ es una fila del tablero}\}$
- $C = \{x | x \text{ es una posición cualquiera del tablero}\}$
- $D = \{x | x \text{ es la posición inicial de los caballos al } iniciar \text{ la partida}\}$

Teniendo en cuenta lo anterior tenemos:

- $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- $B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
- $C = A \times B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\} \times \{1,2,3,4,5,6,7,8\} = \{(a, 1), \dots, (h, 8)\}$
- $D = \{(b, 1), (g, 1), (b, 8), (g, 8)\} = \{b, g\} \times \{1,8\}$

Conceptos preliminares

Cardinalidad del conjunto producto

La cardinalidad del producto cartesiano es el producto de las cardinalidades de los conjuntos individuales. Para el caso mas sencillo (dos conjuntos), la cardinalidad del producto cruz esta dada por:

$$|A \times \mathrm{B}| = |A| \cdot |B|$$

Si se extiende el concepto a mas conjuntos tenemos que:

$$|A_1 \times A_2 \times A_3 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_2| \cdots \cdot |A_n| = \prod_{i=1}^{n} |A_i|$$

Agenda

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

- Conceptos preliminares
- **Funciones**
- Algunas funciones importantes

Funciones

Definición

Sean A y B conjuntos no vacíos. Una función f de A a B es una **regla** que asigna a **cada** elemento de A **exactamente un** elemento de B. Esto se escribe como:

$$f: A \rightarrow B$$

Una función $f: A \rightarrow B$ también puede definirse como un subconjunto de $A \times B$ (una relación). Este subconjunto está restringido a una relación donde ningún par de elementos de la relación tiene el mismo primer elemento.

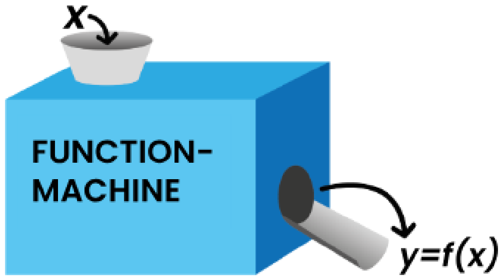
$$f = \{(a, b) \in A \times B | \text{a cada } a \in A \text{ le corresponde un unico } b \in B\}$$

Esto se denota comúnmente como:

$$f(a) = b$$

Resaltando que b es el único elemento de B asignado por la función f al elemento a de A.

Dirichlet (link)



Funciones

Dominio y rango

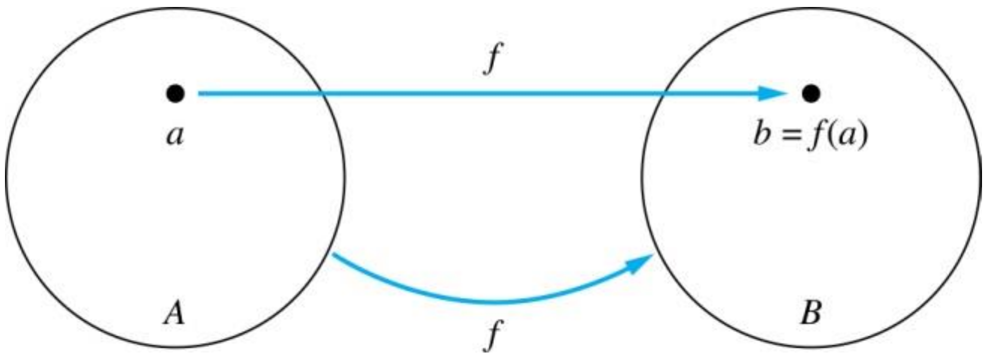
Al dar una función $f: A \to B$ nosotros estamos diciendo f mapea (asigna) A a B o que f es un mapeo (asignación) de A a B.

Dominio:

- Conjunto de todos los elementos de entrada
- Dominio de la función:
  - $D(f) = A$
  - $Dominio(f) = A$

Rango:

- Conjunto de todos los valores de salida o resultados posibles que genera la función
- Rango de la función:
  - $R(f) = A$
  - $Rango(f) = A$



- Dos funciones son iguales cuando tienen el mismo dominio, el mismo rango y asignan cada elemento del dominio al mismo elemento del rango.

Funciones

Representación de funciones

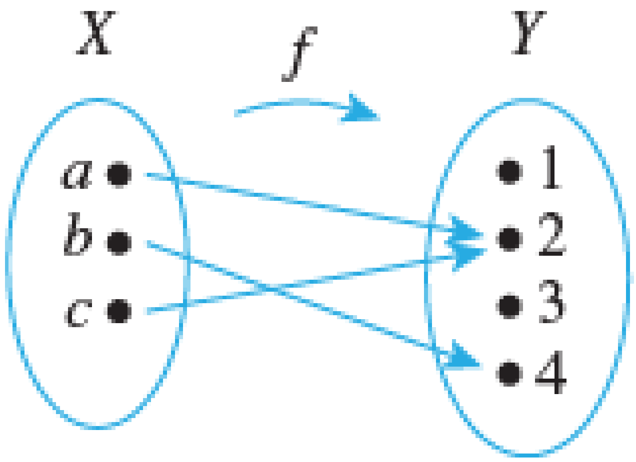
Las funciones pueden ser representadas de diferentes maneras:

1. **Descripción Verbal**: Una declaración explícita de la tarea.
2. **Tabla de valores**: Se crea una tabla con dos columnas. Una columna para los valores de entrada (dominio) y otra para los correspondientes valores de salida (rango).
3. **Representación Algebraica (Formula)**: Usa una ecuación algebraica para definir la relación precisa entre la entrada (x) y la salida $(f(x)$ o $y)$.
4. **Diagrama de flechas (mapeo)**: Se dibujan dos conjuntos (generalmente óvalos), uno para el dominio y otro para el rango, y se usan flechas para conectar cada entrada con su única salida.
5. **Plano cartesiano**: Se representan los pares ordenados $(x, f(x))$ como puntos en un plano con un eje horizontal (eje x) para el dominio y un eje vertical (eje y) para el rango.
6. **Conjunto de Pares Ordenados**: Es una lista explícita de los valores de entrada y su correspondiente salida
7. **Programa de computador**: Se define una subrutina que toma unas entradas, aplica un procedimiento y devuelve una salida como resultado de dicho procedimiento.

Funciones

Ejemplos

- **Ejemplo 1**: Suponga que un curso de matemáticas discretas emplea la calificación por letras {A, B, C, D, F} para medir el desempeño de sus estudiantes. Si las calificaciones para sus estudiantes fueron: A para Adams, C para Chou, B para Goodfriend, A para Rodríguez y F para Stevens. Como puede representar esta información como una función.
- **Ejemplo 2**: Suponga que se tiene la función $y = x^2$, realizar la representación de la función en diferentes formas.
- **Ejemplo 3**: La serie de Fibonacci es una secuencia de números enteros en la que cada número es la suma de los dos anteriores. Se define comúnmente comenzando con 0 y 1.
- **Ejemplo 4**: Sea $X = \{a, b, c\}$ y $Y = \{1,2,3,4\}$ y f la función definida por el diagrama de flechas de la figura, responda las siguientes preguntas:
  a. Represente f como un conjunto de pares ordenados.
  b. Determine el dominio y rango de f
  c. Determine: $f(a), f(b)\ y\ f(c)$



Funciones

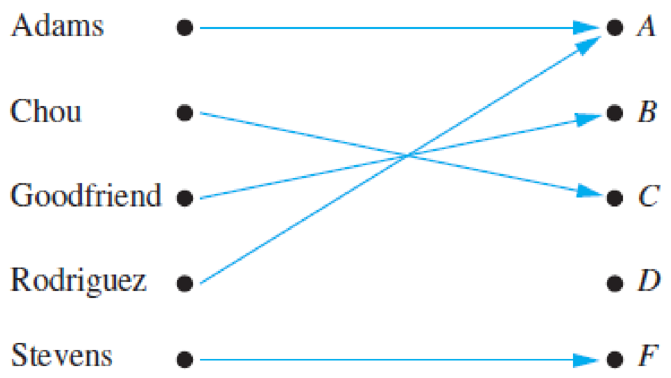
Ejemplo 1 - Solución

Descripción verbal: Estudiantes y notas del curso de Matemáticas Discretas.

Tabla de valores:

Estudiante	Calificación
Adams	A
Chou	C
Goodfriend	B
Rodríguez	A
Stevens	F

Diagrama de flechas (mapeo):



Programa en computador:

1. Uso de diccionarios o Hash Maps (link)
2. Una función que use estructuras condicionales (poco practico para este caso) (link)

Conjunto de pares ordenados: Sean A, B y G las nombres, las calificaciones y la función que asigna las calificación a cada estudiante respectivamente tenemos:

- $A = \{Adams, Chou, Goodfried, Rodriguez, Stevens\}$
- $B = \{A, B, C, D, F\}$
- $G = \{(Adams, A), (Chou, C), (Goodfried, B), (Rodriguez, A), (Stevens, F)\}$

Funciones

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

Ejemplo 2 - Solución

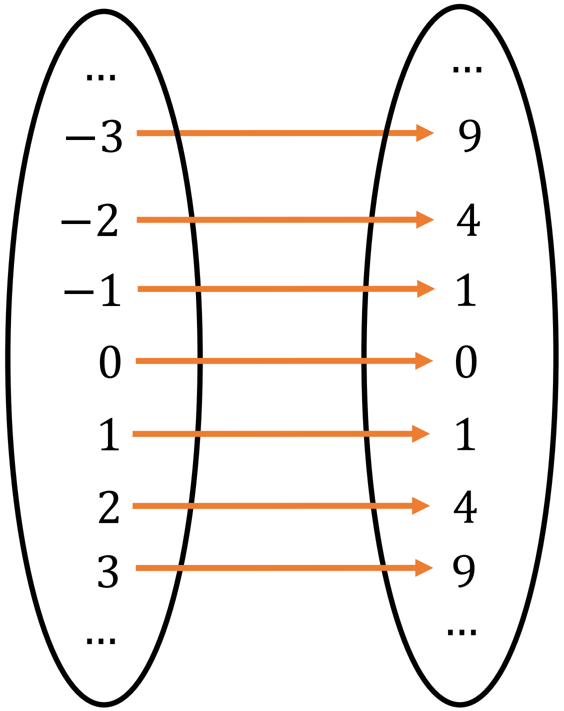
Función:

$$y = x^2$$

Tabla de valores:

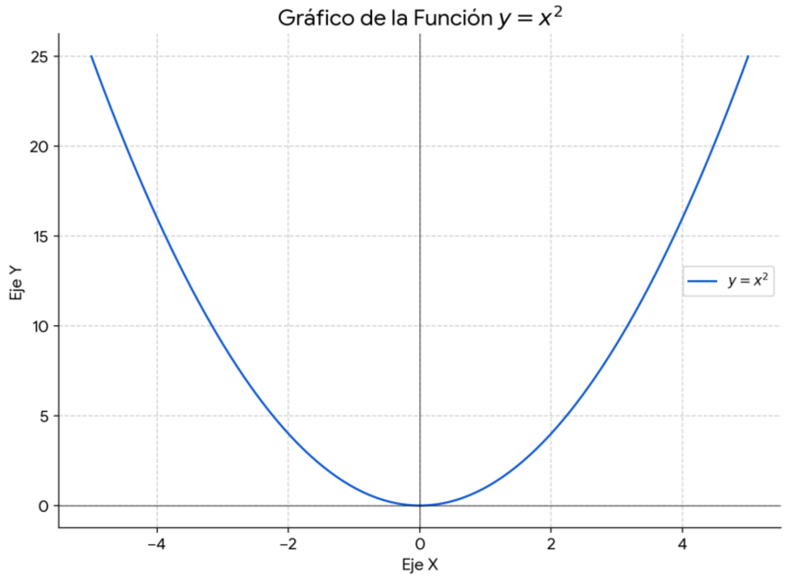
Entrada (x)	Cálculo	Salida (y)
-3	$(-3)^2$	9
-2	$(-2)^2$	4
-1	$(-1)^2$	1
0	$(0)^2$	0
1	$(1)^2$	1
2	$(2)^2$	4
3	$(3)^2$	9

Diagrama de flechas (mapeo):



$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}(f)$ $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{R}(f)$

Grafica en el plano cartesiano:



Programa en computador (link)

Funciones

Ejemplo 3 - Solución

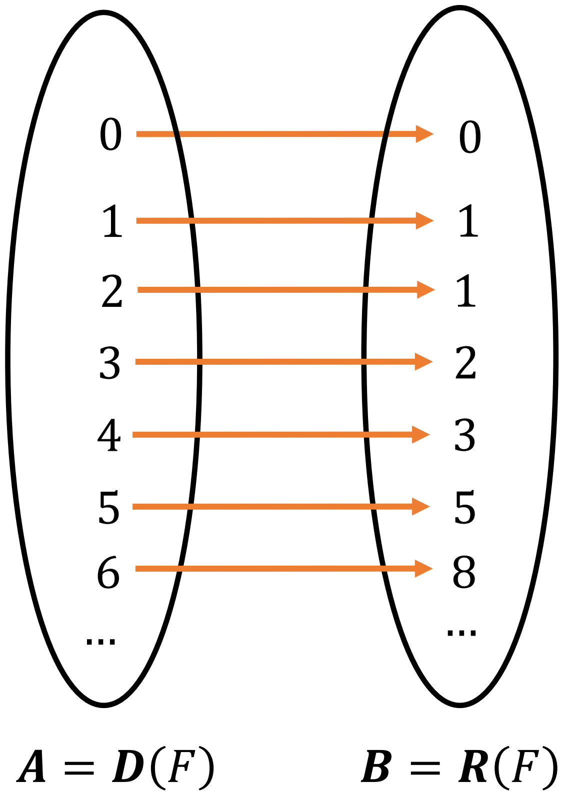
Función:

$$F_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F_{n-1} - F_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

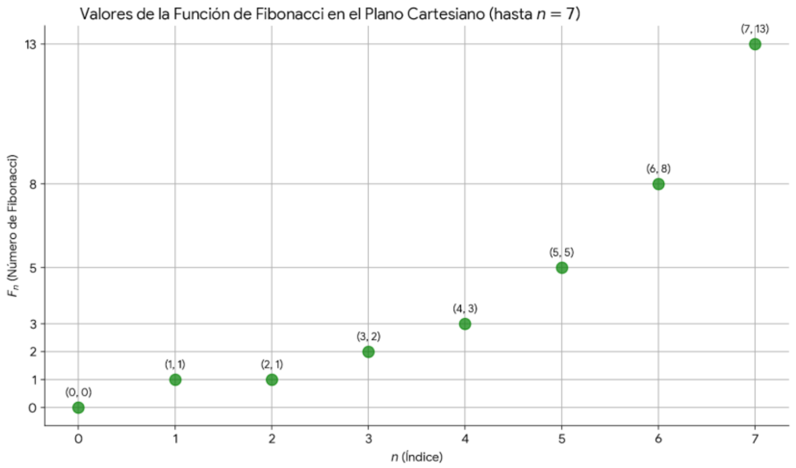
Tabla de valores:

n	F_n	Cálculo
0	0	(definición)
1	1	(definición)
2	1	$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$
3	2	$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$
4	3	$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$
5	5	$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$
6	8	$F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$

Diagrama de flechas (mapeo):



Grafica en el plano cartesiano:

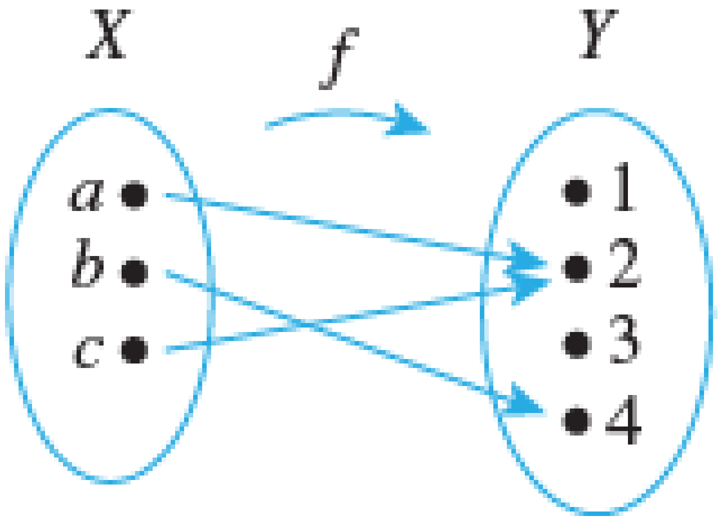


Programa en computador (link)

Funciones

Ejemplo 4 – Solución

Diagrama de flechas (mapeo):



Conjunto de pares ordenados:

$$f = \{(a,2),(b,4),(c,2)\}$$

Dominio y rango

- $\boldsymbol{R}(F) = \{2,4\}$
- $\boldsymbol{D}(f) = \{a,b,c\}$

Dominio y rango

- $f(a) = 2$
- $f(b) = 4$
- $f(c) = 2$

Agenda

UNIVERSIDAD
DE ANTIOQUIA

- Repaso clase anterior
- Funciones
- **Algunas funciones importantes**

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Clasificación

Los siguientes ejemplos ilustran algo de la amplia variedad de diferentes tipos de funciones.

- Función floor y ceiling.
- Función factorial
- Función identidad sobre un conjunto
- Sucesiones.
- Una función definida sobre un conjunto potencia.
- Funciones definidas sobre un producto cartesiano
- Funciones de codificación y decodificación.
- La función de distancia de Hamming.
- Funciones booleanas.

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

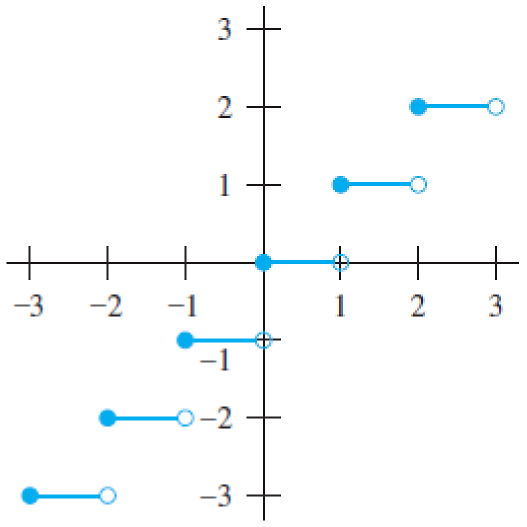
Función piso (Floor)

La función piso de un número real x, denotada como $\lfloor x \rfloor$ (o también **`floor(x)`**), devuelve el mayor entero que es menor o igual a x. En otras palabras, "redondea" x hacia abajo al entero más cercano. Formalmente esto es:

$$\lfloor x \rfloor = \text{el } mayor \text{ entero } n \text{ tal que } n \leq x$$

Ejemplos: A continuación la grafica de la función piso así como la evaluación de esta para algunos valores.

x	$\lfloor x \rfloor$
$-\frac{1}{2}$	$\left\lfloor -\frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor -0.5 \rfloor = -1$
-0.1	$\lfloor -0.1 \rfloor = -1$
$\frac{1}{2}$	$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$
2.1	$\lfloor 2.1 \rfloor = 2$



$y = \lfloor x \rfloor$

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

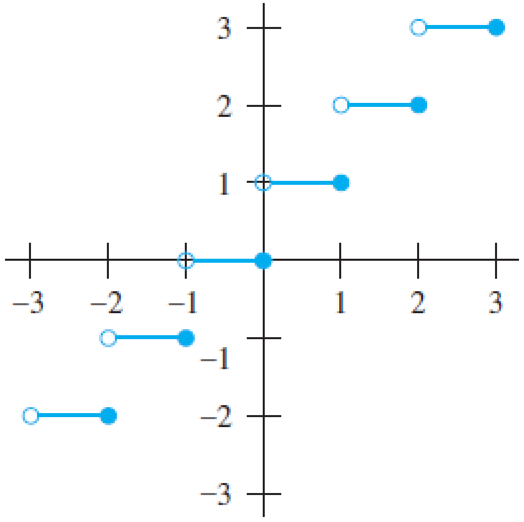
Función techo (ceil)

La función techo de un número real x, denotada como $\lceil x \rceil$ (o también **`ceil(x)`**), devuelve el mayor entero que es mayor o igual a x. En otras palabras, "redondea" x hacia arriba al entero más cercano. Formalmente esto es:

$$\lceil x \rceil = \text{el } mayor \text{ entero } n \text{ tal que } n \geq x$$

Ejemplos: A continuación la grafica de la función techo así como la evaluación de esta para algunos valores.

x	$\lceil x \rceil$
$-\frac{1}{2}$	$\left\lceil -\frac{1}{2} \right\rceil = \lceil -0.5 \rceil = 0$
-0.1	$\lceil -0.1 \rceil = 0$
$\frac{1}{2}$	$\left\lceil \frac{1}{2} \right\rceil = \lceil 0.5 \rceil = 1$
2.1	$\lceil 2.1 \rceil = 1$



$y = \lceil x \rceil$

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Sucesiones

Una sucesión es una lista ordenada de elementos (o términos). A diferencia de los conjuntos, donde el orden no importa y los elementos no se repiten, en una secuencia el orden es crucial y los elementos pueden repetirse.

Notación: Existen de representar sucesiones, algunas son:

1. **Listado de términos**: Empleado para secuencias finitas o para mostrar los primeros términos de una secuencia infinita:

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

2. **Fórmula explícita**: Se usa fórmula que define el $n-esimo$ termino a_n en función de n, esto es: $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ o $\{a_n\}$

$$a_n = \frac{1}{n} \qquad \{a_n\} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

3. **Relación de recurrencia**: Una fórmula que define un término de la secuencia en función de uno o más términos anteriores. Necesita uno o más condiciones iniciales (**casos base**).

$$F_n = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ F_{n-1} - F_{n-2}, & n \geq 2 \end{cases}$$

Algunas funciones importantes

Sucesión

Ejemplos: La siguiente tabla muestra algunos ejemplos de sucesiones:

Nombre	**Formula general** $\{a_n\}$	**Primeros términos**	**Observaciones**
Constante	$a_n = c$	$3,3,3,3,3, \ldots$	La constante $c = 3$
Aritmética	$a_n = a_0 + nd$	$2,5,8,11,14, \ldots$	El termino $a_0 = 2$ y la constante $d = 3$.
Geométrica	$a_n = a_0 \cdot r^n$	$1,2,4,8,16, \ldots$	El termino $a_0 = 1$ y la razón $r = 2$.
Cuadrática	$a_n = n^2$	$0,1,4,9,16, \ldots$	Los términos son cuadrados perfectos
Cúbica	$a_n = n^3$	$0,1,8,27,64, \ldots$	Los términos son cubos perfectos
Pares	$a_n = 2n$	$0,2,4,6,8, \ldots$	Los términos son números pares
Impares	$a_n = 2n + 1$	$0,1,3,5,7, \ldots$	Los términos son números impares
Fibonacci	$a_0 = 0,\ a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$	$0,1,1,2,3,5,8, \ldots$	Cada termino es la suma de los dos anteriores
Factorial	$a_n = n!$	$1,1,2,3,24,120,720, \ldots$	Cada termino es el producto de todos los enteros positivos con $\leq n$
Alternante signo	$a_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$	$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$	Cada termino alterna el signo
Binaria	$a_n = n \bmod 2$	$0,1,0,1,0, \ldots$	Cada termino es 0 y 1

Para profundizar mas ver: **The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (OEIS)** (link)

Algunas funciones importantes

Sumatoria

Una secuencia consiste en la suma de los términos $a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n$ de una secuencia $\{a_n\}$

Notación:

- La notación para una sumatoria se muestra a continuación:

$$\sum_{j=m}^{n} a_j = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$$

- Una representación mas generalizada para un conjunto S esta dada por:

$$\sum_{j \in S} a_j$$

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Sumatoria

Ejemplo 1: Cual es el valor de $\sum_{k=4}^{8}(-1)^k$

$$\sum_{k=4}^{8}(-1)^k = (-1)^4 + (-1)^5 + (-1)^6 + (-1)^7 + (-1)^8 = 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 = 1$$

Ejemplo 2: Cual es el valor de $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij$

$$\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} ij = \sum_{i=1}^{4}(i + 2i + 3i) = \sum_{i=1}^{4} 6i = 6(1) + 6(2) + 6(3) + 6(3) = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$$

Ejemplo 3: Cual es el valor de $\sum_{s\in\{0,2,4\}} s$

$$\sum_{s\in\{0,2,4\}} s = 0 + 2 + 4 = 6$$

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Sucesión

Ejemplos: La siguiente tabla muestra algunos ejemplos de sucesiones:

Expresión	Formula cerrada
$\sum_{i=1}^{n} c$	nc
$\sum_{i=1}^{n} i$	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^{n} i^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} i^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{i=1}^{n} (a_1 + (i-1)d)$	$\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Expresión	Formula cerrada
$\sum_{i=0}^{n} ar^i$	$a\frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
$\sum_{i=0}^{n} ar^{i-1}$	$a\frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1)$
$\sum_{i=0}^{\infty} ar^i$	$\frac{a}{1-r} \quad (\lvert r \rvert < 1)$
$\sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i+1})$	$a_1 - a_{n+1}$

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Productoria

Una secuencia consiste en el producto de los términos $a_m, a_{m+1}, \dots, a_n$ de una secuencia $\{a_n\}$

Notación:

- La notación para una sumatoria se muestra a continuación:

$$\prod_{j=m}^{n} a_j = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n$$

- Una representación mas generalizada para un conjunto S esta dada por:

$$\prod\nolimits_{j \in S} a_j$$

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

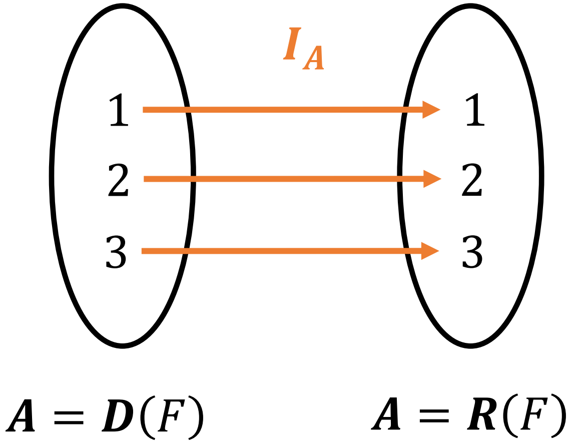
Función identidad

La función identidad es una función que mapea cada elemento del conjunto a sí mismo. Definiendo esto mas formalmente, si A un conjunto no vacío, La función identidad sobre A denotada como id_A (I_A o 1_A), esta definida por:

$$I_A : A \to A, \qquad I_A(x) = x \quad \forall x \in A$$

Ejemplo: Sea $A = \{1,2,3\}$, entonces

- $I_A(1) = 1$
- $I_A(2) = 2$
- $I_A(3) = 3$



Luego, la representación como pares ordenados de I_A será:

$$I_A = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$$

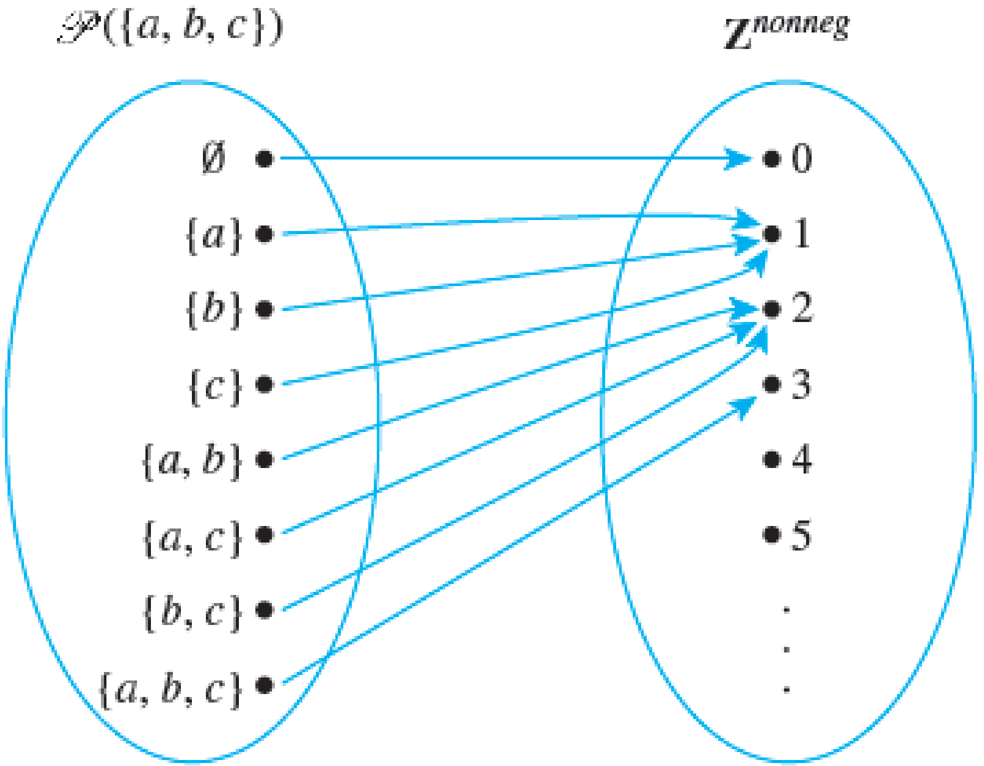
Algunas funciones importantes

Función definida sobre un conjunto potencia

Previamente se vió que $\mathcal{P}(A)$ denota el potencia de un conjunto A. Suponiendo que se define la función $F: \mathcal{P}(\{a,b,c\}) \to \mathbb{N}$ como sigue para cada $X \in \mathcal{P}(\{a,b,c\})$,

$$F(X) = \text{numero de elementos en } X$$

Dibuje el diagrama de flechas para F y exprese F como pares de puntos.



$$F = \{(\emptyset, 1), (\{a\}, 1), (\{b\}, 1), (\{b\}, 1), (\{a,b\}, 2), (\{a,c\}, 2), (\{b,c\}, 2), , (\{a,b,c\}, 3)\}$$

Algunas funciones importantes

Función definida sobre un producto cartesiano

Se define funciones $M: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $R: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como sigue: para todos los pares de números reales (a, b),

$$M(a, b) = ab$$

$$R(a, b) = (-a, b)$$

Entonces M es la función multiplicación que envía cada par de números reales al producto de los dos y R es la función de reflexión que envía cada punto en el plano que corresponde a un par de números reales a la imagen espejo del punto a través del eje vertical. Tenemos:

- $M(-1,1) = ? \to M(-1,1) = (-1)(1) = -1$
- $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = ? \to M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$
- $M(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = ? \to M(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = (\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 2$

- $R(2,5) = (-(2), 5) = (-2,5)$
- $R(-2,5) = (-(-2), 5) = (2,5)$
- $R(3, -4) = (-(3), -4) = (-3, -4)$

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Funciones de codificación y decodificación

Los mensajes digitales constan de sucesiones finitas de 0 y de 1. Cuando se comunican a través de un canal de transmisión, con frecuencia se codifican de forma especial para reducir la posibilidad de que sean ilegibles por ruido que interfiera en las líneas de transmisión.

Por ejemplo, suponga que un mensaje consiste en una sucesión de 0 y de 1. Una forma sencilla de codificar el mensaje es escribir cada bit tres veces. Por tanto, el mensaje

$$00101111$$

podría codificarse como

$$000000111000111111111111$$

El receptor del mensaje lo decodifica sustituyendo cada sección de tres bits idénticos por un bit que es igual a todos los tres.

Algunas funciones importantes

Funciones de codificación y decodificación

Sea A el conjunto de todas las cadenas de 0 y de 1 y sea T el conjunto de todas las cadenas de 0 y de 1 que consisten de triples consecutivos bits idénticos. Los procesos de **codificación** y **decodificación** descritos anteriormente son realmente funciones de A a T y de T a A.

- **Función de codificación**: La función de codificación E es la función de A a T se define como sigue: Para cada cadena $s \in A$:

$$E(s) = \text{cadena que se obtiene de } s \text{ al reemplazar cada bit de } s \text{ por el mismo bit escrito tres veces}$$

- **Función de decodificación**: La función de codificación D se define como sigue: Para cada cadena $t \in T$:

$$D(s) = \text{cadena que se obtiene de } t \text{ al sustituir cada triple consecutivos de tres bits identicos de } t \text{ por una sola copia de dicho bit.}$$

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Distancia Hamming

La función de distancia de Hamming, nombrada así en honor del científico en computación Richard W. Hamming (link), es muy importante en la teoría de codificación. Da una medida de la "diferencia" entre dos cadenas de 0 y 1 que tienen la misma longitud. Sea S_n el conjunto de todas las cadenas de 0 y de 1 de longitud n. Se define una función $H: S_n \times S_n \to \mathbb{N}$ como sigue: Para cada par de cadenas $(s, t) \in S_n \times S_n$,

$$H(s, t) = \text{número de posiciones en las que } s \text{ y } t \text{ tienen valores diferentes}$$

Aplicando esta definición tenemos para algunos casos en los que $n = 5$:

- $H(11111{,}00000) = 5$
- $H(11000{,}00000) = 2$
- $H(00101{,}01110) = 3$
- $H(10001{,}01111) = 4$

Para profundizar:

- https://www.compscilib.com/calculate/hamming-distance?view=tool
- https://www.datacamp.com/tutorial/hamming-distance

Algunas funciones importantes

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

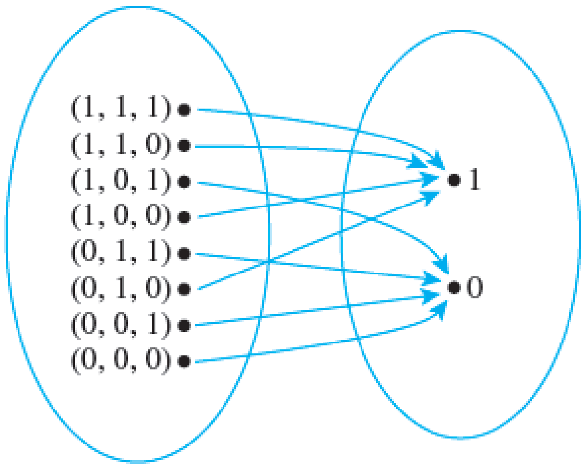
Funciones Booleanas

Cualquier tabla de entrada/salida define una función de la siguiente manera: los elementos de la columna de entrada pueden considerarse tuplas ordenadas de 0 y 1; el conjunto de todas estas tuplas ordenadas constituye el dominio de la función.

Los elementos de la columna de salida son todos 0 o 1; por lo tanto, {0, 1} se considera el codominio de la función. La relación envía cada elemento de entrada al elemento de salida en la misma fila. Así, por ejemplo, la tabla de entrada/salida de figura (a) define la función con el diagrama de flechas de la figura (b).

Input			Output
P	*Q*	*R*	*S*
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

(a)



(b)

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA

Curso de Matemáticas Discretas 1

Clase 9 – Funciones